

حل التمرين 3

(1) نحسب $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ علما أن : $\cos \alpha = \frac{3}{4}$

نعلم أن $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ إذن $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

وبالتالي : $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

وبما أن $0 < \sin \alpha < 1$ لأن $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ فإن : $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ أي $\tan \alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$: تعني $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

طريقة أخرى :

نعلم أن : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

(حيث $0^\circ < \alpha < 90^\circ$) إذن $\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

أي : $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ①

لأن : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$: إذن بما أن *

فإنه بتطبيق العلاقة ①

نحصل على : $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{9}{16}\right)}$

يعني أن : $\tan^2 \alpha = \frac{16}{9} - 1$

تعني : $\tan^2 \alpha = \frac{16}{9} - \frac{9}{9}$

تعني : $\tan^2 \alpha = \frac{7}{9}$ تعني أن $\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

لأن : $\tan \alpha > 0$

* حساب $\sin \alpha$

نعلم أن : $\tan^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ أي $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$

وبما أن : $\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و $\cos \alpha = \frac{3}{4}$

فإن : $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

(2) نحسب $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ علما أن : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

بما أن : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ فإن : $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9}$

يعني : $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$ وبما أن : $0 < \cos < 1$ فإن : $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

وبما أن : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ فإن $\tan \alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)}$ أي $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) نحسب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ علما أن : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\tan \alpha = \sqrt{7}$

نعلم أن : $\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ إذن : $1 + \sqrt{7}^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

أي : $\cos^2 \alpha = \frac{1}{8}$ وبالتالي : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{8}$ أي : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

لأن : $0 < \cos \alpha < 1$ وبما أن $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

فإن : $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{8}$ تعني $\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$ أي $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

لأن : $0 < \sin \alpha < 1$ وبالتالي : $\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$