1) إثبات النتيجة

• لدينا :

$$u_2 = u_{1+1}$$
$$= \frac{(3 \times 1 + 3)\, u_1 - 8 \times 1 - 12}{1}$$
$$= \frac{6 \times 3 - 8 - 12}{1}$$
$$= -2$$

ومنه : $u_2 \leq 0$.

• نفترض أن $u_n \leq 0$ ، لنبين أن $u_{n+1} \leq 0$.

بما أن $3n + 3 \geq 0$ فإن $(3n + 3)\, u_n \leq 0$

وبما أن $-8n - 12 \leq 0$ فإن $(3n + 3)\, u_n - 8n - 12 \leq 0$

وبالتالي : $\frac{(3n+3)\,u_n - 8n - 12}{n} \leq 0$

اي : $u_{n+1} \leq 0$

إذن : $u_n \leq 0$ لكل n من $IN^* - \{1\}$

2) رتابة (u_n) :

لندرس إشارة الفرق

ليكن $n \geq 2$. لدينا : $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3n+3)\,u_n - 8n - 12}{n} - u_n$$
$$= \frac{(3n+3)\,u_n - 8n - 12 - n\,u_n}{n}$$
$$= \frac{(2n+3)\,u_n - 8n - 12}{n}$$

وبما أن $u_n \leq 0$ فإن $0 \leq (2n+3)\,u_n - 8n - 12$.

أي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

اي : $u_{n+1} \leq u_n$ لكل $n \geq 2$

وبما أن $3 \leq -2$ فإن $u_2 \leq u_1$.

إذن : $u_{n+1} \leq u_n$ لكل n من IN^* أي (u_n) تناقصية.

3) أ– (v_n) متتالية هندسية :

ليكن n عنصراً من IN^*. لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{4 - u_{n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{4 - \frac{(3n+3)\,u_n - 8n - 12}{n}}{n+1}$$
$$= \frac{4n - 3\,(n+1)\,u_n + 8n + 12}{n\,(n+1)}$$
$$= \frac{12\,n + 12 - 3\,(n+1)\,u_n}{n\,(n+1)}$$
$$= \frac{12\,(n+1) - 3\,(n+1)\,u_n}{n\,(n+1)}$$
$$= \frac{3\,(n+1)\,(4 - u_n)}{n\,(n+1)}$$
$$= 3 \cdot \frac{4 - u_n}{n}$$

بما أن $v_n = \frac{4 - u_n}{n}$ فإن : $v_{n+1} = 3 \cdot v_n$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 3.

وحدها الاول هو : $v_1 = \frac{4-u_1}{1} = \frac{4-3}{1} = 1$.

ب- حساب v_n و u_n :

- لدينا : (v_n) متتالية هندسية حدها الاول 1 وأساسها 3.

ومنه :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$ لكل $n \geq 1$.

- لدينا : $v_n = \frac{4-u_n}{n}$ أي $u_n = 4 - n\, v_n$.

إذن : $u_n = 4 - n \,.\, 3^{n-1}$ لكل $n \geq 1$.

جـ- نهاية (u_n) :

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^{n-1} = +\infty$ (لان $3 > 1$) .

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n \,.\, 3^{n-1}) = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - n\, 3^{n-1}) = -\infty$

اي : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$