1– حساب $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} \ln(1+e^x)\, dx$

نضع $u = 1 + e^x$ ومنه $du = e^x\, dx$

من أجل $x = 0$ لدينا $u = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$

ومن أجل $x = \ln 2$ لدينا $u = 1 + e^{\ln 2} = 1 + 2 = 3$

إذن $I = \int_2^3 \frac{\ln u\, du}{u} = \int_2^3 (\ln u)' \ln u\, du$

$$= \left[\frac{\ln^2 u}{2}\right]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln^2 3 - \ln^2 2)$$

2- أ– حساب $J_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$

لدينا :

$$J_1 = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-x^2)' e^{-x^2} = -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right)$$

إذن : $J_1 = \frac{e-1}{2e}$

ب– * لنبين أن : $J_{n+2} = \frac{n+1}{2} J_n - \frac{1}{2e}$

لدينا : $J_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^{n+1} . x e^{-x^2} dx$

نضع : $u(x) = x^{n+1}$ و $v'(x) = x e^{-x^2}$

$u'(x) = (n+1) x^n$ ، $v(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

إذن :
$$J_{n+2}=\left[-\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2}\right]_0^1+\frac{1}{2}(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}(n+1)J_n$$
$$=\frac{n+1}{2}J_n-\frac{1}{2e}$$

*** حساب J_5 :**

حسب نتيجة السؤال السابق لدينا :
$$J_5=J_{3+2}=\frac{3+1}{2}J_3-\frac{1}{2e}=2J_3-\frac{1}{2e}$$

لنحسب J_3 :

لدينا :
$$J_3=J_{1+2}=\frac{1+1}{2}J_1-\frac{1}{2e}=J_1-\frac{1}{2e}$$
$$=\frac{e-1}{2e}-\frac{1}{2e}=\frac{e-2}{2e}$$

إذن :
$$J_5=2.\frac{e-2}{2e}-\frac{1}{2e}=\frac{2e-5}{2e}$$

مع الشامل