1- أ– تحديد a و b :

ليكن x عنصراً من $IR - \{0, -1\}$. لدينا :

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x} = \frac{ax+b(x+1)}{x(x+1)}$$
$$= \frac{(a+b)x+b}{x(x+1)}$$

ومنه :

$$\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+b}{x(x+1)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

إذن : $\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}$

ب- حساب التكامل الأول :

لدينا :

$$I = \int_1^e \frac{x-1}{x(x+1)}\,dx$$
$$= \int_1^e \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \int_1^e \frac{2}{x+1}\,dx - \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$
$$= 2\int_1^e \frac{1}{x+1}\,dx - \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$

ولدينا : $\ln(x+1)$ و $\ln x$ دالتان أصليتان للدالتين التاليتين على التوالي : $x \longrightarrow \frac{1}{x+1}$ و $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

ومنه :

$$I = 2\,[\ln(x+1)]_1^e - [\ln x]_1^e$$
$$= 2\,(\ln(e+1) - \ln(1+1)) - (\ln e - \ln 1)$$
$$= 2\ln(e+1) - 2\ln 2 - 1$$

2- حساب التكامل الثاني :

لدينا : $J = \int_0^1 \frac{e^t-1}{e^t+1}\,dt$

نضع : $x = e^t$ أي : $t = \ln x$

ومنه : $dx = e^t\,dt = x\,dt$ أي : $\frac{1}{x}\,dx = dt$

إذا كان $t=0$ فإن : $x = e^0 = 1$

إذا كان $t=1$ فإن : $x = e^1 = e$.

وبالتالي :

$$J = \int_1^e \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_{1}^{e} \frac{x - 1}{x\,(x + 1)}\, dx$$

$$= I$$

$$= 2 \ln (e + 1) - 2 \ln 2 - 1$$