I- 1- دراسة تغيرات g

. بما أن الدالة ln معرفة على $]0, +\infty[$ فإن g معرفة على $]0, +\infty[$

. لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(x - \frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= +\infty$$

. الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا $g'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$$= \frac{2x^2 - 1}{x}$$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

2- الاستنتاج

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

إذا كان $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $g(x) > g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ لأن g تناقصية قطعا على $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

إذا كان $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $g(x) > g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ لأن g تزايدية قطعا

على $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$

إذن $g(x) \geq g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \forall x \in]0, +\infty[$

وبما أن $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ فإن $g(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

II- 1- تحديد المجموعة D

لدينا ln معرفة على $]0, +\infty[$

ومنه $D =]0, +\infty[$

حساب نهايات f عند محدات D

. لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x-2) = -2$

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$
$$= -\infty$$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + \ln x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

. لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2- أ- اثبات المتساوية المقترحة

الدالة f قابلة للاشتقاق على D

ليكن x عنصرا من D

لدينا
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln x + \frac{1}{x^2}$$
$$= 1 - \frac{\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

ب- تغيرات الدالة f

لدينا $g(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$ وذلك حسب السؤال الثاني الجزء الأول منه .

ومنه $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

إذن f تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$

ج- معادلة (Δ)

لدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = 1$

ومنه $y = x - 1$ هي معادلة (Δ) مماس (C) عند النقطة $A(1,0)$

3- المقارب المائل للمنحنى (C)

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

إذن (C) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = x - 2$

وضع (C) والمقارب المائل

ليكن x عنصرا من D

لدينا $f(x) - (x-2) = \frac{1 + \ln x}{x}$

ولدينا

$$1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1$$
$$\Leftrightarrow \ln x > \ln \frac{1}{e}$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$
$$1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$
$$1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

إذا كان $x > \frac{1}{e}$ فإن $f(x) - (x-2) > 0$

ومنه (C) يوجد فوق مقاربه المائل

إذا كان $x < \frac{1}{e}$ فإن $f(x) - (x-2) < 0$

ومنه (C) يوجد تحت مقاربه المائل

المنحنى (C) ومقاربه المائل متقاطعان في النقطة $B\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e} - 2\right)$

4- نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C})$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على D

ليكن x عنصرا من D

لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ومنه

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} g'(x) - \frac{2}{x^3} g(x)$$
$$= \frac{2}{x^3}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{x^3}(x^2 - \ln x)$$
$$= \frac{2}{x^3}\left(-\frac{1}{2} + \ln x\right)$$

ولدينا

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \ln x > 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln \sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{e}$$

$$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \sqrt{e}$$

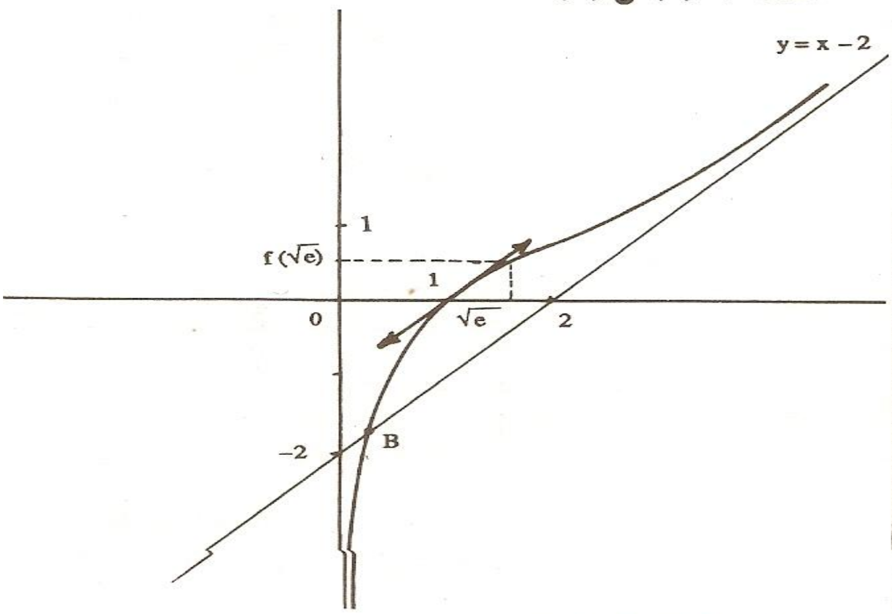
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

إذن $f''(x)$ تنعدم في $\sqrt{e}$ وتغير اشارتها في مجال مفتوح مركزه $\sqrt{e}$

ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف Ω افصولها $\sqrt{e}$ وارتوبها

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} - 2 + \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

5- انشاء (Δ) و (C)



6- حساب المساحة

مساحة السطح المقترح هي :

$$A = \int_1^e (f(x) - (x-2))\,dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= [\ln x]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx$$

$$= 1 + \int_1^e \ln'(x) \ln(x)\, dx$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{2} \ln^2 (x) \right]_1^e$$

$$= \frac{3}{2}$$

وهذه المساحة بالسنتمتر المربع هي $4 \cdot \frac{3}{2} \, cm^2$ أي $6 \, cm^2$