1- أ– حساب النهاية :

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2$

بوضعنا $x = t^2$ بحيث $t = \sqrt{x}$ نجد :

$$\begin{aligned} x(\ln x)^2 &= t^2 (\ln t^2)^2 \\ &= t^2 . (2 \ln t)^2 \\ &= 4 t^2 . (\ln t)^2 \\ &= 4 (t . \ln t)^2 \end{aligned}$$

ومنه : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = 4 \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} (t . \ln t)^2$

$$= 0$$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$)

ب– حساب النهايتين :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x[1 + (\ln x)^2]}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x + x(\ln x)^2}$$

$$= +\infty$$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x + x(\ln x)^2) = 0$ مع $x + x(\ln x)^2 > 0$)

• لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x[1 + (\ln x)^2]} = 0$

(لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} x[1 + (\ln x)^2] = +\infty$)

2- أ– حساب $f'(x)$:

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا :

$$f(x) = \frac{1}{x[1 + (\ln x)^2]} = \frac{1}{x + x(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-[x + x(\ln x)^2]'}{[x + x(\ln x)^2]^2}$$

$$= \frac{-\left(1 + (\ln x)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x\right)}{x^2 [1 + (\ln x)^2]^2}$$

$$= \frac{-[1 + 2\ln x + (\ln x)^2]}{x^2 [1 + (\ln x)^2]^2}$$

إذن : $$f'(x) = \frac{-(1 + \ln x)^2}{x^2 [1 + (\ln x)^2]^2}$$

ب– حساب $f'\left(\frac{1}{e}\right)$:

لدينا : $$f'\left(\frac{1}{e}\right) = f'(e^{-1})$$

$$= \frac{-(1 + \ln e^{-1})^2}{(e^{-1})[1 + (\ln e^{-1})^2]^2}$$

وبما أن $\ln e^{-1} = -1$ فإن $1 + \ln e^{-1} = 0$.

إذن : $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

ج– جدول تغيرات f :

لدينا : $-(1 + \ln x)^2 < 0$ لكل x من $]0 ; +\infty[$.

ومنه : $f'(x) < 0$ لكل x من $]0 ; +\infty[$.

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{e}{2}$	↘	0

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}\left[1 + \left(\ln \frac{1}{e}\right)^2\right]} = \frac{1}{\frac{2}{e}} = \frac{e}{2}$$

-3 أ – حساب $f''(x)$:

ليكن x عنصرا من IR_+^* . لدينا :

$$f'(x) = \frac{-(1+\ln x)^2}{x^2\,[1+(\ln x)^2]^2}$$

نضع : $u(x) = -(1+\ln x)^2$ و $v(x) = x^2\,[1+(\ln x)^2]^2$

ومنه : $$f''(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,.\,v'(x)}{[v(x)]^2}$$

ولدينا : $$u'(x) = -2\,(1+\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2x\,(1+(\ln x)^2)^2 + 2x^2\,.\,[1+(\ln x)^2]\,(2\,.\,\frac{1}{x}\,\ln x) \\ &= 2x\,[1+(\ln x)^2]^2 + 4x\,\ln x\,[1+(\ln x)^2] \\ &= 2x\,[1+(\ln x)^2]\,[1+(\ln x)^2 + 2\ln x] \\ &= 2x\,[1+(\ln x)^2]\,(1+\ln x)^2 \end{aligned}$$

وبالتالي : $$\begin{aligned} u'(x)\,v(x) &= -\frac{2}{x}(1+\ln x)\,.\,x^2\,[1+(\ln x)^2]^2 \\ &= -2x\,(1+\ln x)\,.\,[1+(\ln x)^2]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x)\,.\,v'(x) &= -(1+\ln x)^2\,.\,2x\,[1+(\ln x)^2]\,(1+\ln x)^2 \\ &= -2x\,(1+\ln x)^4\,[1+(\ln x)^2] \end{aligned}$$

وهكذا لدينا :

$$\begin{aligned} &u'(x)\,.\,v(x) - u(x)\,.\,v'(x) = \\ &-2x\,(1+\ln x)\,[1+(\ln x)^2]^2 + 2x\,(1+\ln x)^4\,[1+(\ln x)^2] \\ &= 2x\,(1+\ln x)\,[1+(\ln)^2]\,[-(1+(\ln x)^2) + (1+\ln x)^3] \\ &= 2x\,(1+\ln x)\,[1+(\ln x)^2]\,[-1-(\ln x)^2 + 1 + 3\ln x \\ &\qquad + 3(\ln x)^2 + (\ln x)^3] \\ &= 2x\,(1+\ln x)\,[1+(\ln x)^2]\,[3\ln x + 2(\ln x)^2 + (\ln x)^3] \\ &= 2x\,(1+\ln x)\,[1+(\ln x)^2]\,(\ln x)\,[3 + 2\ln x + (\ln x)^2] \\ &= 2x\,(1+\ln x)\,[1+(\ln x)^2]\,(\ln x)\,[2 + (1+\ln x)^2] \end{aligned}$$

إذن :

$$f''(x) = \frac{2x\,(1+\ln x)\,[1+(\ln x)^2]\,[2+(1+\ln x)^2]\,\ln x}{x^4\,[1+(\ln x)^2]^4}$$

أي : $$f''(x) = \frac{2\,(1+\ln x)\,[2+(1+\ln x)^2]\,\ln x}{x^3\,[1+(\ln x)^2]^3}$$

ب– استنتاج نقطتي الانعطاف :

لندرس إشارة $f''(x)$.

بما أن $2+(1+\ln x)^2 > 0$ و $x^3 > 0$ و $1+(\ln x)^2 > 0$

لكل x من $]0, +\infty[$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة الجداء $(1+\ln x)\ln x$

• وهكذا لدينا : $f''(x) \geq 0 \iff (1+\ln x)\ln x \geq 0$

$\iff \ln x \leq -1$ أو $\ln x \geq 0$

www.Achamel.net cours pratiques en ligne

$\Leftrightarrow \quad \ln x \leq \ln \frac{1}{e}$ أو $\ln x \geq \ln 1$

وبما أن ln تزايدية فإن :

$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{e}$ أو $x \geq 1$

• بنفس الطريقة نجد :

$f''(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{e} \leq x \leq 1$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ أو $x = \frac{1}{e}$

إذن : $f''(x)$ تنعدم وتتغير إشارتها في 1 و $\frac{1}{e}$.

وهذا يعني أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف $A(1, f(1))$ و $B\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$

ولدينا : $f(1) = 1$ و $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e}{2}$

ومنه : $A(1, 1)$ و $B\left(\frac{1}{e}, \frac{e}{2}\right)$.

ج– معادلتا المماسين في A و B :

• نعلم أن $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ ومنه :

معادلة المماس في B هي : $y - \frac{e}{2} = 0\left(x - \frac{1}{e}\right)$ أي $y = \frac{e}{2}$

• لدينا : $f'(1) = \dfrac{-(1+\ln 1)^2}{(1)^2\,[1 + (\ln 1)^2]^2} = -1$

ومنه : معادلة المماس في النقطة A هي :

$y - 1 = (-1)(x - 1)$ أي $y = -x + 2$

4- إنشاء منحنى f