1- أ– اتصال f على يمين 0 :

لنحسب نهاية f على يمين 0 .

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 = 0$$

(لأن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = 0$)

ب– قابلية اشتقاق f على يمين 0 :

ليكن x عنصرا من D . لدينا :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 - 0}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2$$

$$= 1$$

$$\left(\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = 0 \right.$$ (لأن

إذن : f قابلة للاشتقاق على يمين 0 ولدينا : $f'_d(0) = 1$

2- حساب النهاية الأولى :

ليكن x عنصرا من D . لدينا :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x} = \infty \right.$$ (لأن

2- حساب النهاية الثانية :

ليكن x عنصرا من D . لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 = 1 \right.$$ (لأ ن

3- أ– التحقق من المتساوية :

ليكن x عنصرا من $]0;1[\cup]1;+\infty[$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 - x \\ &= x\left[\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 - 1\right] \\ &= x\left[\left(1 - \frac{1}{\ln x} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{\ln x} - 1\right)\right] \\ &= x\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\left(2 - \frac{1}{\ln x}\right) \end{aligned}$$

إذن : $f(x) - x = \dfrac{x}{\ln x}\left(\dfrac{1}{\ln x} - 2\right)$

ب– دراسة الفروع الانهائية :

• لدينا : $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

ومنه : (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 1$.

• لدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. لنحسب $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \right.$$ (لأ ن

لنحسب النهاية $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$. لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x}\left(\frac{1}{\ln x} - 2\right)$$
$$= -\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} - 2\right) = -2$

إذن : (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y = x$ بجوار $+\infty$.

ج– تقاطع (C) والمستقيم $y = x$:

ليكن x عنصرا من D . لدينا :

$$f(x) = x \iff x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 = x$$

إذا كان $x \neq 0$ فإن :

$$f(x) = x \iff \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 = 1$$
$$\iff 1 - \frac{1}{\ln x} = 1 \quad \text{أو} \quad 1 - \frac{1}{\ln x} = -1$$
$$\iff \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{\ln x} = 2$$

وبما أن $\frac{1}{\ln x} \neq 0$ فإن :

$$f(x) = x \iff \ln x = \frac{1}{2}$$
$$\iff x = e^{\frac{1}{2}}$$

ولدينا من جهة اخرى $f(0) = 0$

إذن : (C) يقطع المستقيم $y = x$ في النقطتين $A\left(e^{\frac{1}{2}} ; e^{\frac{1}{2}}\right)$ و $O(0 , 0)$.

4- أ– حساب $f'(x)$:

ليكن x عنصرا من D ويخالف 0 . لدينا :

$$f'(x) = \left[x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2\right]'$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 + 2x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)\left(1 - \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2}\right)$$
$$= \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln^2 x - \ln x + 2}{\ln^2 x}\right)$$

ب– جدول تغيرات f :

مميز ثلاثية الحدود $x^2 - x + 2$ هو $\Delta = 1 - 8 = -7$.

ومنه : $x^2 - x + 2 > 0$ لكل x من IR .

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\frac{\ln x - 1}{\ln x}$.

إذن :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \text{ و } \ln x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)\ln x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x > 1 \text{ أو } \ln x < 0$$
$$\Leftrightarrow x > e \text{ أو } x < 1$$

جدول التغيرات :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e) = e\left(1 - \frac{1}{\ln e}\right)^2 = 0$$

ج- رسم المنحنى (C) :