-1 أ – حساب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

لكل x من $IR^{+*}$ ، $f(x) = \frac{1}{x}(1 + (\ln x)^2)$

وبما أن : $\lim_{x\to 0^+} 1 + (\ln x)^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

فإن : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

ب– * لنبين أن : $\frac{1 + (\ln x)^2}{x} = \frac{1}{t^2} + 4$

لدينا : $t = \sqrt{x}$ ، إذن : $x = t^2$

ومنه : $\frac{1 + (\ln x)^2}{x} = \frac{1 + (\ln t^2)^2}{t^2}$

$$= \frac{1 + (2\ln t)^2}{t^2} = \frac{1}{t^2} + 4 . \frac{(\ln t)^2}{t^2}$$

وبالتالي فإن : $\frac{1 + (\ln x)^2}{x} = \frac{1}{t^2} + 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$

-2 * حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإن t يؤول كذلك إلى $+\infty$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} + 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$

$$= 0 + 4 . 0^2$$

وبالتالي فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2-* حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $IR^{+*}$ ولدينا لكل x من $IR^{+*}$ :

$$f'(x) = \frac{2\ln x . \frac{1}{x} . x - 1 - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= -\frac{(\ln x)^2 - 2\ln x + 1}{x} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x}$$

* جدول تغيرات الدالة f

| x | 0 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $2e^{-1}$ | ↘ | 0 |

-3 أ– دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 0$

أي محور الأراتيب

ولدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$

أي محور الأفاصيل

### ب- نقطتا الإنعطاف

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $IR^{+*}$ ولدينا لكل x من $IR^{+*}$ :

$$f''(x) = -2\left(\frac{\ln x - 1}{x}\right)\left(\frac{\ln x - 1}{x}\right)'$$

$$= -2\left(\frac{\ln x - 1}{x}\right)\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x + 1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2(\ln x - 1)(\ln x - 2)}{x^3}$$

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $(\ln x - 1)(\ln x - 2)$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقعر المنحنى (C):

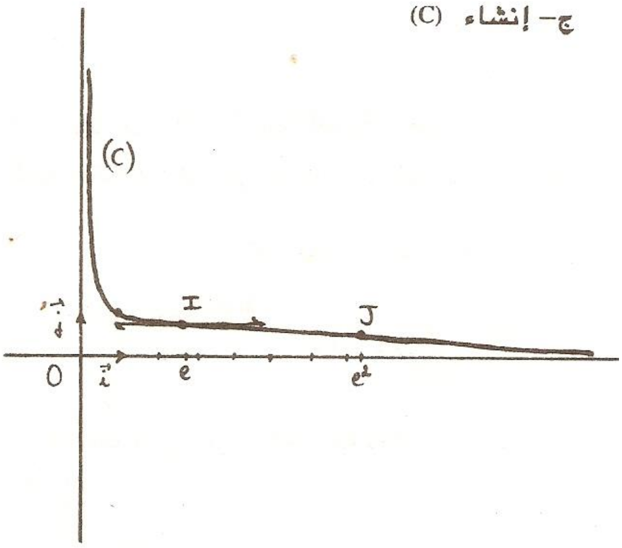
| x | 0 | | e | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x - 1$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $\ln x - 2$ | ‖ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f''(x)$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| تقعر (C) | ‖ | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ | |

الدالة $f''$ تنعدم مع تغيير الإشارة في كل من العددين e و $e^2$

إذن المنحنى (C) يقبل بالفعل نقطتي إنعطاف I و J

بحيث أفصول I هو e وأرتوبها $2e^{-1}$ وأفصول J هو $e^2$ وأرتوبها هو $f(e^2) = 5e^{-2}$

### ج- إنشاء (C)



-4 حساب المساحة $\mathcal{A}$

لدينا :

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}(\ln x)^2\right)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + (\ln x)' \ln^2 x\right)dx$$

$$= \left[\ln x + \frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e = 1 + \frac{1}{3} - 0$$

إذن :

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3}\,cm^2$$