1- . تحديد D :

بما أن $1+e^{2x}>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ فإن $D=\mathbb{R}$

. حساب النهايتين :

. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+e^{2x}}-e^{2x})$

$=1$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$

. ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+e^{2x}}-e^{2x})$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{e^{2x}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(\sqrt{\frac{1}{e^{4x}}+\frac{1}{e^{2x}}}-1\right)$$

$$=-\infty$$

2- دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (C) :

. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

إذن (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ عند $-\infty$.

. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}\left(\sqrt{\frac{1}{e^{4x}}+\frac{1}{e^{2x}}}-1\right)$$

$$=-\infty$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب .

3- a) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا $f(x)=\sqrt{1+e^{2x}}-e^{2x}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}-2e^{2x}$

إذن $f'(x)=e^{2x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}-2\right)$

$$=\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}(1-2\sqrt{1+e^{2x}})$$

. اشارة $f'(x)$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $1-2\sqrt{1+e^{2x}}$

لدينا $$1-2\sqrt{1+e^{2x}}=\frac{1-4(1+e^{2x})}{1+2\sqrt{1+e^{2x}}}$$
$$=\frac{-3-4e^{2x}}{1+2\sqrt{1+e^{2x}}}$$

ومنه $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)<0$

b) جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

-4 نقط تقاطع (C) مع محوري الاحداثيات

. لدينا $f(0)=\sqrt{2}-1$ إذن (C) يقطع محور الاراتيب في نقطة زوج احداثيتيها هو $(0,\sqrt{2}-1)$.

. ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

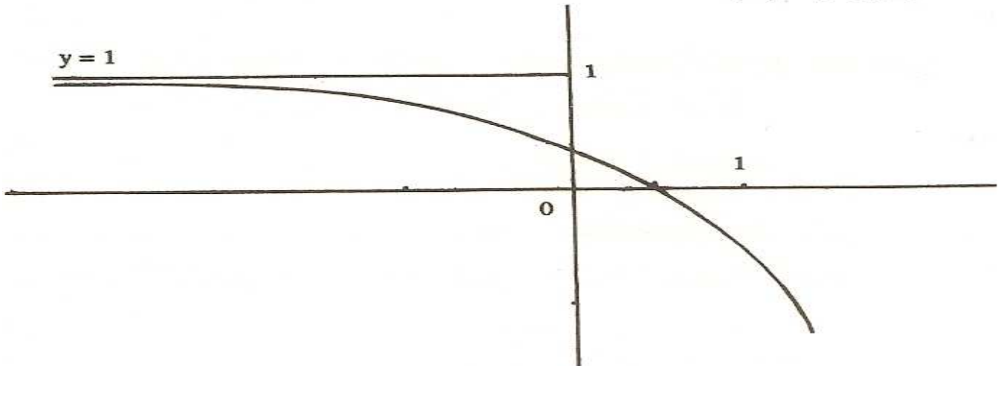
لدينا $$f(x)=0 \iff \sqrt{1+e^{2x}}=e^{2x}$$
$$\iff 1+e^{2x}=e^{4x}$$
$$\iff e^{4x}-e^{2x}-1=0$$
$$\iff \begin{cases}X=e^{2x}\\ X^2-X-1=0\end{cases}$$

مميز المعادلة $X^2-X-1=0$ هو 5 ومنه $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ هما جذراه هذه المعادلة

ومنه $$f(x)=0 \iff e^{2x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\iff 2x=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\iff x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

إذن (C) يقطع محور الأراتيب في النقطة $A\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2},0\right)$

-5 انشاء (C) :



-6 حساب الحجم المطلوب

ليكن x عنصرا من المجال $\left[-\frac{1}{2}\ln 2, 0\right]$

لدينا

$$f^2(x) = (\sqrt{1+e^{2x}} - e^{2x})^2$$
$$= 1 + e^{2x} - 2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}} + e^{4x}$$

وبما أن $2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}} = (1+e^{2x})'(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}$ فإن

$x \longmapsto \frac{2}{3}(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto 2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}$

إذن حجم المجسم هو :

$$V = \int_{-\frac{1}{2}\ln 2}^{0} \pi f^2(x)\,dx$$

$$= \pi\left[x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{2}{3}(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}\ln 2}^{0}$$

$$= \pi\left(\frac{3}{4} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{7}{16} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\right)$$