## 1- تحديد $D_f$

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا : $x \in D_f \Leftrightarrow ex - 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow e^x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \neq \ln 2$$

إذن : $D_f = IR - \{\ln 2\}$

$$= ]-\infty, \ln 2[ \cup ]\ln 2, +\infty[$$

## 2- أ– حساب نهايات f عند محدات $D_f$

• لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x - 2} = -1$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x - 2} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا $\lim\limits_{x \to \ln 2} (2x - 1) = 2\ln 2 - 1$

وبما أن $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^+} \frac{2}{e^x - 2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^-} \frac{2}{e^x - 2} = -\infty$

فإن : $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^-} f(x) = -\infty$

## ب– دراسة الفروع اللانهائية

• لدينا : $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^-} f(x) = -\infty$

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = \ln 2$

• لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x - 2}$

$$= 0$$

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = 2x - 1$

• بملاحظة أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^x - 2} = -1$ فإننا نكتب $f(x)$ على الشكل التالي :

$$f(x) = \frac{2}{e^x - 2} + 1 - 1 + 2x - 1$$

$$= \left(\frac{2}{e^x - 2} + 1\right) + (2x - 2)$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^x - 2} + 1$

$$= 0$$

فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = 2x - 2$

**طريقة ثانية :**

بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2x = -2$

**3- أ- حساب $f'(x)$**

الدالة f قابلة للاشتقاق $D_f$ ولدينا لكل x من $D_f$ :

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 2)^2} + 2$$

$$= 2\left(\frac{-e^x}{(e^x - 2)^2} + 1\right) = 2\left(\frac{-e^x + e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x - 2)^2}\right)$$

$$= \frac{2(e^{2x} - 5e^x + 4)}{(e^x - 2)^2}$$

وبما أن : $(e^x - 4)(e^x - 1) = e^{2x} - e^x - 4e^x + 4$

$$= e^{2x} - 5e^x + 4$$

فإن : $f'(x) = \dfrac{2(e^x - 4)(e^x - 1)}{(e^x - 2)^2}$ لكل x من $D_f$

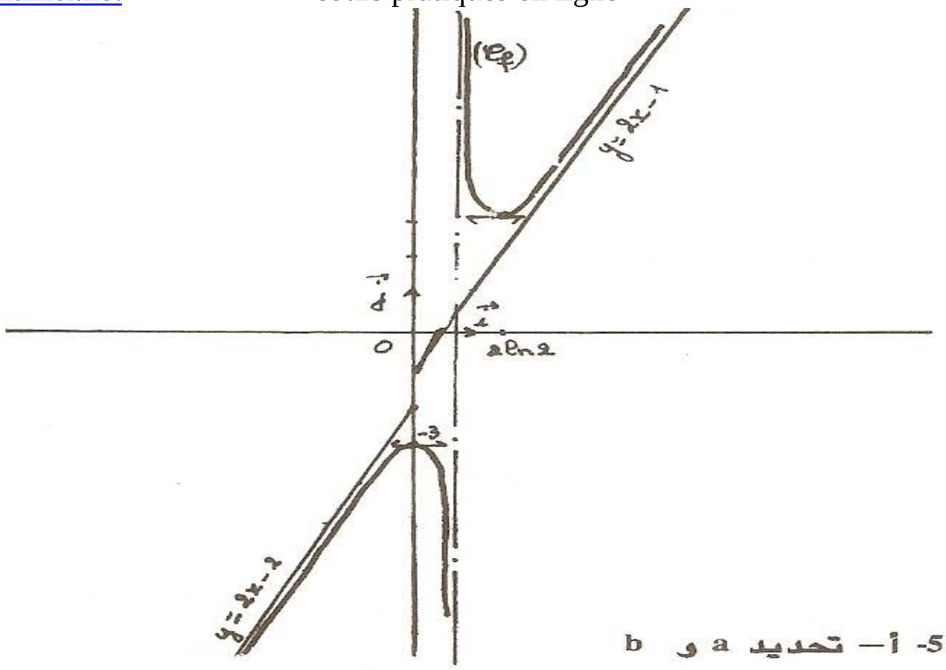
**ب- جدول تغيرات الدالة f**

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(e^x - 4)(e^x - 1)$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 2$ ‖ | | $2\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x - 4$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |

**4- إنشاء $(C_f)$**




5- أ- تحديد a و b

لكل x من $D_f$ :
$$a+\frac{b\,e^x}{e^x-2}=\frac{ae^x-2a+be^x}{e^x-2}$$
$$=\frac{(a+b)\,e^x-2a}{e^x-2}$$

إذن يكون لدينا :

لكل x من $D_f$ إذا وفقط إذاكان : $\frac{2}{e^x-2}=a+\frac{be^x}{e^x-2}$
$$\begin{cases}a+b=0\\-2a=2\end{cases}$$

أي إذا وفقط إذاكان : $a=-1$ و $b=1$

وبالتالي فإن : $\frac{2}{e^x-2}=-1+\frac{e^x}{e^x-2}$ لكل x من $D_f$

ب- حساب $\mathcal{A}(\lambda)$

بما أن $f(x)\geq 2x-1$ لكل x من $[\ln 3\,,\lambda]$ (أنظر الشكل)

فإن :
$$A(\lambda)=\int_{\ln 3}^{\lambda} f(x)-(2x-1)\;dx$$
$$=\int_{\ln 3}^{\lambda}\frac{2}{e^x-2}dx=\int_{\ln 3}^{\lambda}\left(-1+\frac{e^x}{e^x-2}\right)dx$$
$$=[-x+\ln|e^x-2|]_{\ln 3}^{\lambda}=-\lambda+\ln(e^{\lambda}-2)+\ln 3$$

ج- حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

لدينا : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\lambda+\ln\left(e^{\lambda}\left(1-\frac{2}{e^{\lambda}}\right)\right)+\ln 3\right)$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \left( -\lambda + \ln e^{\lambda} + \ln \left( 1 - \frac{e}{e^{\lambda}} \right) + \ln 3 \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( -\lambda + \lambda + \ln \left( 1 - \frac{2}{e^{\lambda}} \right) + \ln 3 \right)$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \left( \ln \left( 1 - \frac{2}{e^{\lambda}} \right) + \ln 3 \right) = \ln 3$$