1- حل المعادلة $f(x) = 0$

لكل x من IR , هذه المعادلة تكافئ: $\sqrt{1+3e^{2x}} = 2e^{2x}$

أي $1 + 3e^{2x} = 4e^{4x}$ أي : $4(e^{2x})^2 - 3e^{2x} - 1 = 0$

مميز الحدودية $4t^2 - 3t - 1$ هو : $\Delta = 9 + 16 = 25$

إذن جذراها هما : $\frac{3+5}{8} = 1$ و $\frac{3-5}{8} = -\frac{1}{4}$

وبما أن $e^{2x} > 0$ لكل x من IR فإن المعادلة $f(x) = 0$

تكافئ $e^{2x} = 1$ أي : $x = 0$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة هي : $\{0\}$

2- * حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل x من IR :

$$f'(x) = 4e^{2x} - \frac{6e^{2x}}{2\sqrt{1+3e^{2x}}}$$

$$= 4e^{2x} - \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1+3e^{2x}}} = e^{2x}\left(4 - \frac{3}{\sqrt{1+3e^{2x}}}\right)$$

* الاستنتاج

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا: $1 + 3e^{2x} > 1$ إذن : $\sqrt{1+3e^{2x}} > 1$

ومنه : $\frac{3}{\sqrt{1+3e^{2x}}} < 3$ وبالتالي $4 - \frac{3}{\sqrt{1+3e^{2x}}} > 0$

وبما أن : $e^{2x} > 0$

فإن : $f'(x) > 0$ لكل x من IR

وبالتالي فإن الدالة f تزايدية قطعا على IR

-3 أ – * حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 + 3e^{2x}} = 1$

ومنه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ هو إذن مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

* حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

لدينا :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2e^{2x} - \sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}} + 3\right)}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} e^{x}\left(2e^{x} - \sqrt{3 + \frac{1}{e^{2x}}}\right) = +\infty$$

* حساب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x}\left(2e^{x} - \sqrt{3 + \frac{1}{e^{2x}}}\right)$$
$$= +\infty$$

المنحنى (C) يقبل إذن بجوار$+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

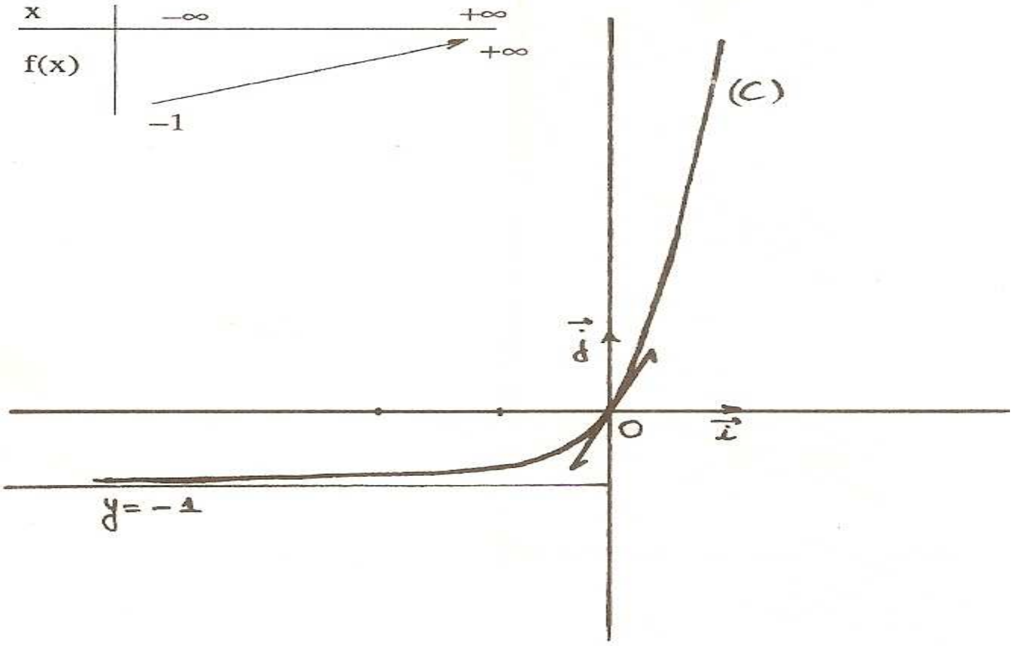
ب– إنشاء (C)

معادلة ديكارتية لماس (C) في النقطة $O(0, 0)$ هي :

$y = f'(0)(x - 0) + 0$ أي : $y = \frac{5}{2}x$

وجدول تغيرات الدالة f هو :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$



4- أ – لنبين أن : $\int_0^{\ln\sqrt{8}} e^{2x}\sqrt{1+3e^{2x}}\,dx = 13$

لدينا:

$$\int_0^{\ln\sqrt{8}} e^{2x}\sqrt{1+3e^{2x}}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^{\ln\sqrt{8}} (1+3e^{2x})'(1+3e^{2x})^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(1+3e^{2x})^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{\ln\sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\left[(1+3e^{2x})^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln\sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{9}\left[\sqrt{(1+3e^{2x})^3}\right]_0^{\ln\sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{9}\left[(1+3e^{2x})\sqrt{1+3e^{2x}}\right]_0^{\ln\sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{9}((1+24).5-4.2) = \frac{1}{9}.117$$

إذن : $\int_0^{\ln\sqrt{8}} e^{2x}\sqrt{1+3e^{2x}}\,dx = 13$

ب– حساب الحجم : V

لدينا:

$$V = \int_0^{\ln\sqrt{8}} \pi\,[f(x)]^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\ln\sqrt{8}} (4e^{4x}+1+3e^{2x}-4e^{2x}\sqrt{1+3e^{2x}})\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\ln\sqrt{8}} (4e^{4x}+1+3e^{2x})\,dx - 4\pi\int_0^{\ln\sqrt{8}} e^{2x}\sqrt{1+3e^{2x}}\,dx$$

$$= \pi\left[e^{4x}+x+\frac{3}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln\sqrt{8}} - 4\pi.13$$

$$= \pi\left(64+\ln\sqrt{8}+\frac{3}{2}.8-1-\frac{3}{2}\right)-52\pi = \pi\left(64+\frac{1}{2}\ln 2^3+\frac{19}{2}-52\right)$$

إذن : $V = \frac{(43+3\ln 2)\pi}{2}$ (بوحـدة الحجم)