1- لنبين أن f متصلة في 1

لدينا :
$$f(1) = \frac{1}{2-\sqrt{1}} = \frac{1}{2-1} = 1$$

ولدينا :
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2-\sqrt{x}} = \frac{1}{2-1} = 1 = f(1)$$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة $x_0 = 1$

ولدينا:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x - \sqrt[3]{1-x} = 1-\sqrt[3]{1-1} = 1-0 = 1 = f(1)$$

إذن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة $x_0 = 1$

خلاصة :الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 1$ لأنها متصلة على اليمين وعلى اليسار في هذه النقطة

2- أ– لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

لدينا :
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2-\sqrt{x}}-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-2+\sqrt{x}}{(x-1)(2-\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(2-\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})}$$
$$= \frac{1}{(1+1)(2-1)} = \frac{1}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة $x_0 = 1$

و $f_d'(1) = \frac{1}{2}$

ب–* حساب $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

نضع : $U = \sqrt[3]{1-x}$

إذن : $1-x = U^3$ ومنه : $x-1 = -U^3$

وبالتالي فإن :
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-\sqrt[3]{1-x}-1}{x-1}$$
$$=\lim_{U\to 0^+}\frac{-U^3-U}{-U^3}=\lim_{U\to 0^+} 1+\frac{1}{U^2}=+\infty$$

ملاحظة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة $x_0=1$

*** التأويل الهندسي**

المنحنى (C) يقبل في النقطة A (1, 1) نصف مماس رأسي موجه نحو الأسفل .

3- أ- حساب نهايات f عند محدات $D_f =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$

• لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\sqrt{x}}=0$

(لأن : $\lim_{x\to+\infty} 2-\sqrt{x}=-\infty$)

ولدينا : $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{2-\sqrt{x}}$
$=-\infty$

و $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{2-\sqrt{x}}$
$=+\infty$

(لأن : $\lim_{x\to 4^+} 2-\sqrt{x}=0^-$ و $\lim_{x\to 4^-} 2-\sqrt{x}=0^+$)

• لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt[3]{1-x}=-\infty$

(لأن : $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt[3]{1-x}=-\infty$)

ب- جدول تغيرات الدالة f

إذا كان : $x\in]-\infty,1[$ فإن: $f'(x)=\left[x-(1-x)^{\frac{1}{3}}\right]'$
$$=1-\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}-1}(1-x)'=1+\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=1+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

وواضح أن : $f'(x)>0$ لكل x من $]-\infty, 1[$

وإذا كان $x\in]1, 4[\cup]4, +\infty[$ فإن : $f'(x)=\left(\frac{1}{2-\sqrt{x}}\right)'$
$$=-\frac{(2-\sqrt{x})'}{(2-\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2(2-\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$$

وواضح كذلك أن $f'(x)>0$ لكل x من $]1, 4[\cup]4, +\infty[$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$(+\infty)$ ‖ $\frac{1}{2}$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	(-1)	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

-4 لنبين أن المعادلة $f(x) = 0$ ، $x \in]0, 1[$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$

الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0, 1[$

إذن فهي تقابل من $]0, 1[$ نحو $]-1, 1[$ $f(]0, 1[) =]-1, 1[$

وبما أن $0 \in]-1, 1[$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالفعل حلا وحيدا α ينتمي الى المجال $]0, 1[$

وبما أن : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} < 0$ و $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} > 0$

و $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[\subset]0, 1[$ فإن : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

-5 أ- دراسة الفروع اللانهائية

• رأينا أن : $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 4$

ورأينا كذلك أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ أي محور الأفاصيل

• لدينا :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{\sqrt[3]{1-x}}{(-x)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{(-x)^3}} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = 1 + 0 = 1$$

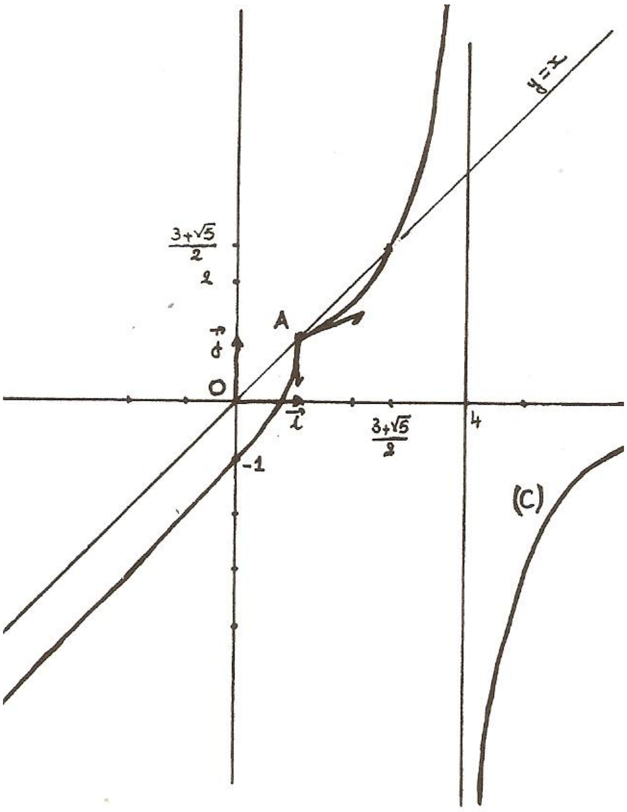
و

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} x - \sqrt[3]{1-x} - x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt[3]{1-x} = -\infty$$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة : $y = x$

ب- إنشاء (C)



ملاحظة : معادلة ديكارتية لحامل نصف مماس (C) في النقطة A (1, 1) على اليمين هي : $y = f_d'(1)(x-1)+1$

أي $y = \frac{1}{2}(x-1)+1$ أي : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

6- أ– لنبين أن : $g(I) \subset I$

ليكن **x** عنصرا من المجال $I = [1, 2[$

إذن : $1 \le x < 2$

وبما أن g تزايدية قطعا على المجال $[1, 2[$

فإن: $g(1) \le g(x) < g(2)$

أي : $1 \le g(x) < \frac{1}{2-\sqrt{2}}$

وبما أن : $\frac{1}{2-\sqrt{2}} < 2$

فإن : $1 \le g(x) < 2$

وبالتالي فإن : $g(I) \subset I$

ب– إثبات أن (U_n) متقاربة وحساب نهايتها ℓ

بين بالترجع أن $1 \le U_n < 2$ لكل n من IN وأن (U_n) تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة

وبما أن الدالة g متصلة على $[1, 2[$ فإن النهاية ℓ

تحقق : $g(\ell) = \ell$

أي : $\frac{1}{2-\sqrt{\ell}} = \ell$ أي : $2\ell - \ell\sqrt{\ell} = 1$

أي : $\ell\sqrt{\ell} = 2\ell - 1$

وبما أن $1 \leq U_n < 2$ فإن : $1 \leq \ell \leq 2$

وبالتالي فإن : $\ell\sqrt{\ell} \geq 0$ و $2\ell - 1 \geq 0$

ومنه فإن : $\ell\sqrt{\ell} = 2\ell - 1$ تكافئ $(\ell\sqrt{\ell})^2 = (2\ell - 1)^2$

أي : $\ell^3 = 4\ell^2 - 4\ell + 1$ أي $\ell^3 - 4\ell^2 + 4\ell - 1 = 0$

وبملاحظة أن العدد 1 هو جذر للحدودية $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

وبانجاز القسمة الاقليدية للحدودية $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ على $x - 1$

نستنتج أن : $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x - 1)(x^2 - 3x + 1)$

وبالتالي فإن المعادلة: $\ell^3 - 4\ell^2 + 4\ell - 1 = 0$

تكافئ : $(\ell - 1)(\ell^2 - 3\ell + 1) = 0$

أي : $\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ أو $\ell = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ أو $\ell = 1$

وبما أن $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \notin [1, 2]$ و $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin [1, 2]$ و $1 \in [1, 2]$

فإن : $\ell = 1$