$$f(x) = \frac{x}{x-1}\sqrt[3]{x^2+3}$$

1- تحديد D

لدينا : $D = \{x \in IR \,/\, x-1 \neq 0$ و $x^2+3 \geq 0\}$

وبما أن $x^2+3 \geq 0$ لكل x من IR

فإن : $D = IR - \{1\}$

$=]-\infty, 1[\cup]1,+\infty[$

2- أ-* حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$

*** حساب $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$**

لدينا : $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2+3} = \sqrt[3]{4}$

وبما أن : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$

فإن : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

ب- تحديد الفروع اللانهائية

• رأينا أن : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 1$

• لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}} = 1 \,.\, 0 = 0$$

إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

• لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3\left(-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x-1} \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}} = -1 \cdot 0 = 0$$

إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

3- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ولدينا لكل x من D :

$$f'(x) = \left[\frac{x}{x-1}(x^2+3)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$= \frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}(x^2+3)^{\frac{1}{3}} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot (x^2+3)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2} \cdot (x^2+3)^{\frac{1}{3}} + \frac{2x^2}{3(x-1)}(x^2+3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{(x^2+3)^{-\frac{2}{3}}}{3(x-1)^2}\left[-3(x^2+3)+2x^2(x-1)\right]$$

$$= \frac{(x^2+3)^{-\frac{2}{3}}}{3(x-1)^2}(-3x^2-9+2x^3-2x^2)$$

$$= \frac{(x^2+3)^{-\frac{2}{3}}}{3(x-1)^2}(2x^3-5x^2-9)$$

وبما أن : $(2x^2+x+3)(x-3) = 2x^3-6x^2+x^2-3x+3x-9$

$$= 2x^3-5x^2-9$$

فإن: $f'(x) = \frac{(x^2+3)^{-\frac{2}{3}}}{3(x-1)^2} \cdot (2x^2+x+3)(x-3)$ لكل x من D

4- جدول تغيرات الدالة f

لكل x من D : $\dfrac{(x^2+3)^{-\frac{2}{3}}}{3(x-1)^2} > 0$

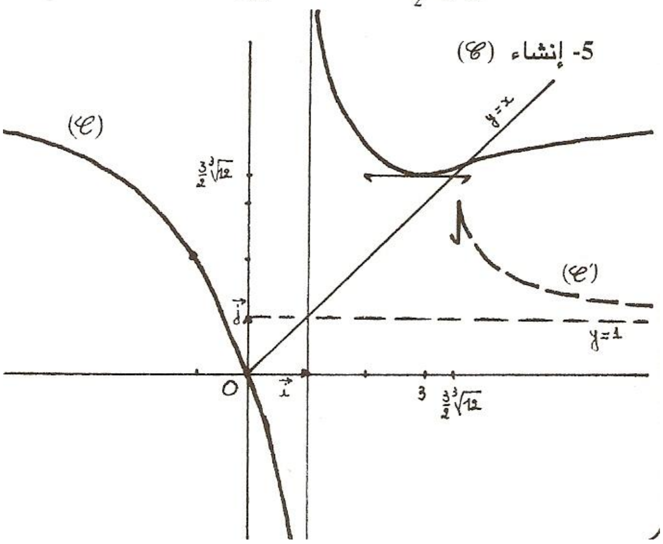
و $2x^2 + x + 3 > 0$ (لأن $\Delta < 0$ و $2 > 0$)

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x - 3$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{12}$	↗	$+\infty$

5- إنشاء $(\mathscr{C})$



6- أ– لنبين أن g تقابل من $]1, 3]$ الى مجال I

الدالة g متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]1, 3]$ ، إذن فهي تقابل من $]1, 3]$ نحو المجال $\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{12}, +\infty\right[$ $= I = f(]1, 3])$

وبالتالي فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{12}, +\infty\right[$ نحو $]1, 3]$

ب– إنشاء $(\mathscr{C}')$

المنحنى $(\mathscr{C}')$ هو مماثل منحنى f على $]1, 3]$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل أعلاه)