$$\begin{cases} a_0 = 3 \quad ; \quad b_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n + 1 \end{cases} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

(1

$$u_n = a_n - b_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n + 1 - \frac{1}{3} a_n - \frac{2}{3} b_n - 1 \\ &= \frac{1}{3} (a_n - b_n) \end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n}$$

ومنه فإن $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

ب ـ * بما أن $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = a_0 - b_0 = 2$.

فإن :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \qquad *$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

(2 $\quad V_n = \dfrac{a_n + b_n}{n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$

أ ـ لدينا $\quad V_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{1} = \dfrac{a_0 + b_0 + 2}{1} = 6$

إذن $\quad V_1 \geq 2$

نفترض أن $V_p \geq 2$ مع $p \in \mathbb{N}^*$.

لنبين أن $\quad V_{p+1} \geq 2$

لدينا : $\quad V_{p+1} = \dfrac{a_{p+1} + b_{p+1}}{p+1} = \dfrac{a_p + b_p + 2}{p+1}$

$$V_p \geq 2 \Rightarrow \frac{a_p + b_p}{p} \geq 2$$

$$\Rightarrow a_p + b_p \geq 2p$$

$$\Rightarrow a_p + b_p + 2 \geq 2(p+1)$$

3

$$\Rightarrow \frac{a_p + b_p + 2}{p+1} \geq 2$$

$$\Rightarrow V_{p+1} \geq 2$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad V_n \geq 2}$

ب . *

$$\frac{2 - V_n}{n+1} + V_n = \frac{2 - V_n + n V_n + V_n}{n+1}$$

$$= \frac{2 + n V_n}{n+1}$$

$$= \frac{2 + a_n + b_n}{n+1}$$

$$= \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{n+1}$$

$$= V_{n+1}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; V_{n+1} = \frac{2 - V_n}{n+1} + V_n}$

* لدينا

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2 - V_n}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n \geq 2 \Rightarrow \frac{2 - V_n}{n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n \leq 0$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad V_{n+1} \leq V_n}$

ومنه فإن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ تناقصية.

ج- * بما أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ تناقصية ومصغورة بالعدد 2 فإنها متقاربة.

$$* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n \geq 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n \geq 2$$

إذن $\ell$ نهاية المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ موجبة قطعا.

(3 *

$$\begin{cases} u_n = a_n - b_n \\ V_n = \dfrac{a_n + b_n}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n - b_n = u_n \\ a_n + b_n = n\,V_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,a_n = u_n + n\,V_n \\ 2\,b_n = n\,V_n - u_n \end{cases}$$

إذن

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{u_n + n\,V_n}{2} \\ b_n = \dfrac{-u_n + n\,V_n}{2} \end{array} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

* لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \ell \quad \text{و} \quad \ell > 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n\,V_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty}$$