1- الجذران المربعان للعدد $-11-4\sqrt{3}i$

ليكن x و y عددين حقيقيين

بما أن : $(x+iy)^2=-11-4\sqrt{3}i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-11-4\sqrt{3}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-11 \\ 2xy=-4\sqrt{3} \end{cases}$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$(x+iy)^2=-11-4\sqrt{3}i \Leftrightarrow |x+iy|^2=\left|-11-4\sqrt{3}i\right|$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{121+48}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=13$$

فإن : $(x+iy)^2=-11-4\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-11 \\ x^2+y^2=13 \\ 2xy=-4\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ xy=-2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ xy=-2\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-1 \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$

وبالتالي فإن الجذران المربعان للعدد $-11-4\sqrt{3}i$ هما : $1-2\sqrt{3}i$ و $-1+2\sqrt{3}i$

طريقة ثانية :

لدينا : $-11-4\sqrt{3}i=1-4\sqrt{3}i-12$

$$=1^2-2.2\sqrt{3}i+(2\sqrt{3}i)^2$$

$$=(1-2\sqrt{3}i)^2$$

إذن الجذران المربعان للعدد $-11-4\sqrt{3}i$ هما $1-2\sqrt{3}i$ و $-1+2\sqrt{3}i$

a-2 – التحقق من أن $\Delta=(1-2\sqrt{3}i)^2$

المميز المختصر للمعادلة (E) هو :

$$\Delta=(-1)^2-4+(3+\sqrt{3}i)$$

$$=1-12-4\sqrt{3}i$$

$$=-11-4\sqrt{3}i$$

وحسب نتيجة السؤال السابق : $\Delta=(1-2\sqrt{3}i)^2$

b- تحديد z_0 **و** z_1

حلا المعادلة (E) هما :

$\dfrac{1+1-2\sqrt{3}i}{2}$ و $\dfrac{1-1+2\sqrt{3}i}{2}$

أي : $1-\sqrt{3}i$ و $\sqrt{3}i$

وبما أن z_0 هو الحل التخيلي الصرف

فإن : $z_0=\sqrt{3}i$ و $z_1=1-\sqrt{3}i$

c- كتابة z_0 و z_1 على الشكل المثلثي

لدينا :
$$z_0=\sqrt{3}i$$
$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\left[\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right]$$

و لدينا
$$z_1=1-\sqrt{3}i$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$$

b- التحقق من أن $3z_1^3=8z_0^2$

بما أن :
$$3z_1^3=3.\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]^3$$
$$=3.\left[2^3,-\pi\right]$$
$$=3.\left[8,\pi\right]$$
$$=3.(-8)$$
$$=-24$$

و :
$$8z_0^2=8(i\sqrt{3})^2$$
$$=8.-3$$
$$=-24$$

فإن :
$$3z_1^3=8z_0^2$$

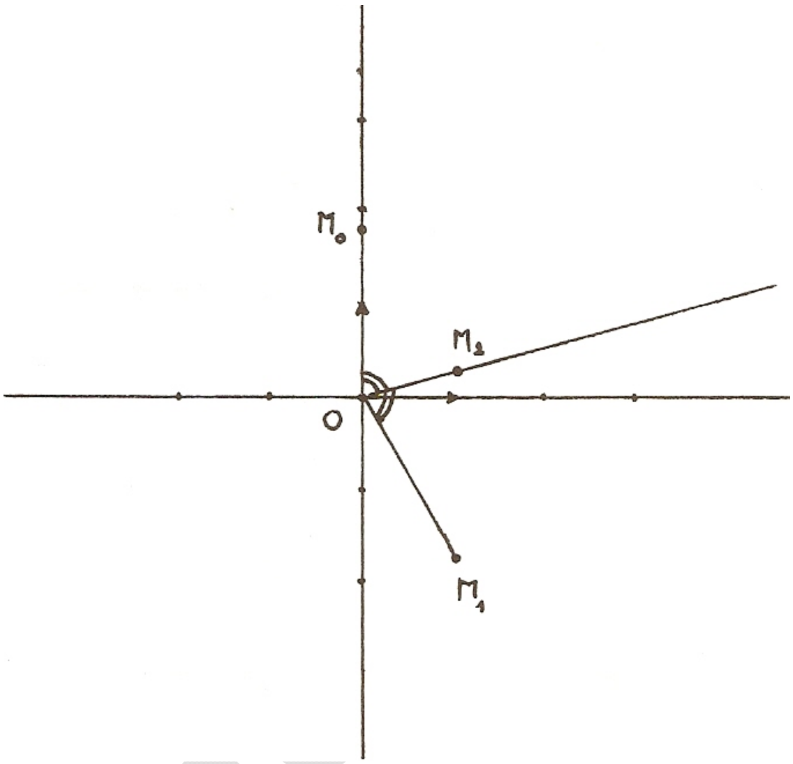
3-a- التحقق من أن $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_0}{z_2}\right)[2\pi]$

بما أن :
$$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv\arg z_2-\arg z_1\,[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$$

و بما أن :
$$\arg\left(\frac{z_0}{z_2}\right)\equiv\arg z_0-\arg z_2\,[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}[2\pi]$$
$$\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$$

فإنه بالفعل لدينا
$$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_0}{z_2}\right)[2\pi]$$

b- **لنبين أن (OM_2) هو المنصف الداخلي للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}})$**



بما أن : $(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_2-0}{z_1-0}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)[2\pi]$$

و بما أن : $(\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_0}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_0-0}{z_2-0}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{z_0}{z_2}\right)[2\pi]$$

وبما أن : $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_0}{z_2}\right)[2\pi]$

فإن : $(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}) \equiv (\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_0})[2\pi]$

وبالتالي فإن المستقيم (OM_2) هو بالفعل المنصف الداخلي للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_0}})$