1-أ- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} = \sqrt[3]{x^2+1} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب- دراسة الفرع اللانهائي

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = 1-0+0 = 1$$
و $$= \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} -2+\sqrt[3]{x^2+1}$$
$$= +\infty$$

إذن (ζ) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم ذو المعادلة y =x

2-أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^+

لدينا لكل x من IR^+
$$f'(x) = \left[x-2+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right]'$$
$$= 1+\frac{1}{3}2x(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} = 1+\frac{2x}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}$$
إذن : $$= \frac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

ب- جدول تغيرات f

بما أن $f'(x) \succ 0$ لكل x من IR^+

فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي :

x	0		$+\infty$
f ' (x)	1	+	
f(x)	-1	↗	$+\infty$

1- لنبين أن f تقابل من IR^+ نحو مجال I.

بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على IR^+،

فإنها تقابل من IR^+ نحو المجال : $I = f(IR^+) = [-1,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $[-1,+\infty[$ نحو IR^+

4-أ- لنبين أن المعادلة f(x) =0 تقبل حلا وحيدا.

بما أن : $f(1) = -1+\sqrt[3]{2} \succ 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}+\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \prec 0$

إذن : $f(1).f(\frac{1}{2}) \prec 0$

وبما أن f متصلة وتزايدية قطعا على $\left[\frac{1}{2},1\right]$

فإن المعادلة f(x)=0 تقبل بالفعل حلا وحيدا α بحيث $\frac{1}{2} \prec \alpha \prec 1$

ب- تحديد نقطة تقاطع (ζ) و (Δ)

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow -2+\sqrt[3]{x^2+1} = 0$

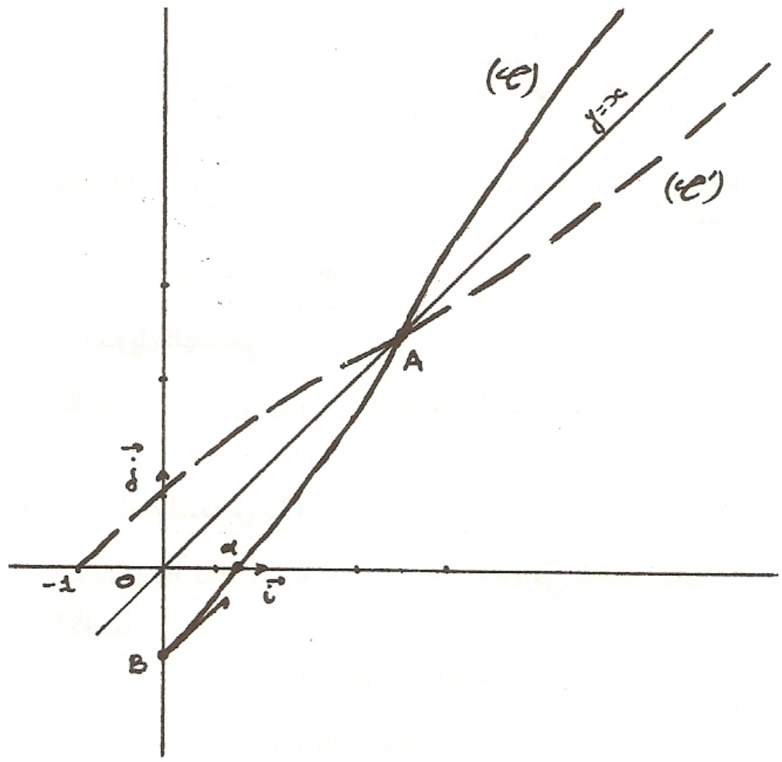
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+1} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 7$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ (لأن $x \geq 0$)

إذن نقطة تقاطع (ζ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته y =x هي : $A\left(\sqrt{7},\sqrt{7}\right)$

ج- رسم (ζ) و (ζ')



ملحوظة : معادلة ديكارتية لحامل نصف مماس (ζ) عند النقطة $B(0,-1)$ هي $y = x-1$