a-1 – تحديد D .

بما أن : $D=\{x\in IR\,/\,2x\neq 0$ و $27+x^2\geq 0\}$

وبما أن : $27+x^2\geq 0$ لكل x من IR

فإن : $D=\{x\in IR\,/\,2x\neq 0\}$

$=\{x\in IR\,/\,x\neq 0\}$

إذن : $D=IR^*$

$=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

b- حساب نهايات f عند محدات D

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{27+x^2}=+\infty$$

و $$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x+1}{2x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

إذن : $$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$$

- لدينا : $$\lim_{x\to0}\sqrt{27+x^2}=\sqrt{27}$$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+1}{2x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+1}{2x}=-\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

a-2 التحقق من صحة المتساوية

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}-\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}-x)=\frac{x+1}{2x}\frac{(\sqrt{27+x^2}-x)(\sqrt{27+x^2}+x)}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

$$=\frac{x+1}{2x}.\frac{27+x^2-x^2}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

إذن : $f(x)-\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=\dfrac{x+1}{2x}\left(\dfrac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

b- الاستنتاج

بما أن : $f(x)-\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=\dfrac{x+1}{2x}\left(\dfrac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}=0$

فإن : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)=0$$

إذن : $$\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{x+1}{2x}\right)=0$$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_1) ذا المعادلة $y=\dfrac{x+1}{2}$

هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

c- لنبين أن (Δ_2) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}+x)=\frac{(x+1)(27+x^2-x^2)}{2x(\sqrt{27+x^2}-x)}$$

$$=\frac{x+1}{2x}.\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}$$

وبما أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

فإن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_2) ذا المعادلة $y=-\frac{x+1}{2}$ هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

3- a- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* ولدينا لكل x من IR^*

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}}{4x^2}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2x}.\frac{2x}{2\sqrt{27+x^2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{27+x^2}}{2x^2}+\frac{x+1}{2\sqrt{27+x^2}}=\frac{x^2(x+1)-(27+x^2)}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

$$=\frac{x^3+x^2-27-x^2}{2x^2-\sqrt{x^2+27}}=\frac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

b- تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^3-27

ولدينا لكل x من IR^* : $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-27=0$

$$\Leftrightarrow x^3=27$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

و $f'(x)\succ 0\Leftrightarrow x^3-27\succ 0$

$$x^3\succ 27$$

$$x\succ 3$$

و $f'(x)\prec 0\Leftrightarrow x\prec 3$

إذن الدالة f تزايدية على المجال $[3,+\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,3]$

c- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

-a-4 تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

ليكن x عددا حقيقيا

بما أن : $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\sqrt{27+x^2}}{2x}=0$

$$\Leftrightarrow x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

فإن محور الأفاصيل يقطع (C) في النقطة $B(-1,0)$

-b رسم (C)