a-1 – لنبين بالترجع أن : $U_n \geq 1$ لكل n من IN

* لدينا : $U_0 = 1$

إذن : $U_0 \geq 1$

إذن الخاصية صحيحة من أجل n=0

* ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن $U_n \geq 1$ ولنبين أن $U_{n+1} \geq 1$

بما أن : $U_n \geq 1$ أي $U_n + 2 \geq 3$

فإن $(U_n+2)^2 \geq 9$ إذن: $5+(U_n+2)^2 \geq 14$

وبالتالي فإن : $\sqrt{5+(U_n+2)^2} \geq \sqrt{14}$

أي : $-2+\sqrt{5+(U_n+2)^2} \geq -2+\sqrt{14}$

أي : $U_{n+1} \geq -2+\sqrt{14}$

وبما أن : $-2+\sqrt{14} \geq 1$

فإن : $U_{n+1} \geq 1$

إذن: $U_n \geq 1 \quad (\forall n \in IN)$

b- لنبين أن (U_n) تزايدية

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $U_{n+1} - U_n = -2+\sqrt{5+(U_n+2)^2} - U_n$

$$= \frac{\left[\sqrt{5+(U_n+2)^2} - (2+U_n)\right]\left[\sqrt{5+(U_n+2)^2} + 2 + U_n\right]}{\sqrt{5+(U_n+2)^2} + 2 + U_n}$$

$$= \frac{5+(U_n+2)^2 - (U_n+2)^2}{\sqrt{5+(U_n+2)^2} + 2 + U_n} = \frac{5}{\sqrt{5+(U_n+2)^2} + 2 + U_n}$$

وبما أن : $U_n \succ 0$ (لأن $U_n \geq 1$)

فإن : $\sqrt{5+(U_n+2)^2} + 2 + U_n \succ 0$

إذن : $U_{n+1} - U_n \succ 0$

وبالتالي فإن (U_n) بالفعل تزايدية

a-2- لنبين أن (V_n) حسابية.

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $U_{n+1} - V_n = (2+U_{n+1})^2 - (2+U_n)^2$

$$= (2-2+\sqrt{5+(U_n+2)^2})^2 - (2+U_n)^2$$

$$= 5+(U_n+2)^2 - (2+U_m)^2 = 5$$

إذن (V_n) هي بالفعل حسابية أساسها 5

b-كتابة V_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من IN

بما أن (V_n) حسابية أساسها r=1 وحدها الأول

$V_0 = (2+U_0)^2 = (2+1)^2 = 9$

فإن $V_n = V_0 + nr$

إذن : $V_n = 9+5n$ لكل n من IN

c- الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN

بماأنه : $V_n = (2+U_n)^2$

فإن : $2+U_n = \sqrt{V_n}$ أو $2+U_n = -\sqrt{V_n}$

وبما أن $2+U_n \succ 0$ (لأن $U_n \succ 0$)

فإن : $2+U_n = \sqrt{V_n}$

وبالتالي فإن : $U_n = -2+\sqrt{V_n}$

إذن: $U_n = -2+\sqrt{5n+9}$ لكل n من IN

حساب نهاية (U_n)

لدينا : $U_n = -2+\sqrt{5N+9}$ لكل n من IN

وبما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n+9} = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2+\sqrt{5n+9} = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$