1-حساب U_1

$$U_1 = U_{0+1}$$
$$= \frac{U_0}{2+2^0U_0} = \frac{1}{2+1.1} = \frac{1}{2+1}$$

إذن : $U_1 = \frac{1}{3}$

2-أ- لنبين بالترجع أن $U_n \succ 0$ لكل n من IN

*بما أن : $U_0 = 1$

فإن : $U_0 \succ 0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل n=0

* ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن $U_n \succ 0$ ولنبين أن : $U_{n+1} \succ 0$

لدينا : $U_n \succ 0$ و $2+2^nU_n \succ 0$

إذن : $\frac{U_n}{2+2^nU_n} \succ 0$

أي : $U_{n+1} \succ 0$

وبالتالي فإن : $U_n \succ 0$ $(\forall n \in IN)$

ب- دراسة رتابة (U_n)

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2+2^nU_n} - U_n$

$$= U_n\left(\frac{1}{2+2^nU_n} - 1\right) = \frac{1-2-2^nU_n}{2+2^nU_n}.U_n$$
$$= -\frac{1+2^nU_n}{2+2^nU_n}.U_n$$

وبما أن $U_n \succ 0$ و $1+2^nU_n \succ 0$ و $2+2^nU_n \succ 0$

فإن : $-\frac{1+2^nU_n}{2+2^nU_n}U_n \prec 0$

أي : $U_{n+1} - U_n \prec 0$

إذن المتتالية (U_n) تناقصية.

ج- الاستنتاج:

لدينا (U_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0 (لأن $U_n \succ 0$ لكل n من IN)

إذن المتتالية (U_n) هي بالفعل متقاربة.

3-أ- لنبين أن (V_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2^{n+1}U_{n+1}} - \frac{1}{2^nU_n}$

$$=\frac{1}{2^{n+1}\left(\frac{U_n}{2+2^nU_n}\right)}-\frac{1}{2^nU_n}=\frac{1}{2^n\left(\frac{Un}{1+2^{n-1}U_n}\right)}-\frac{1}{2^nU_n}$$

$$=\frac{1+2^{n-1}U_n}{2^nU_n}-\frac{1}{2^nU_n}=\frac{1+2^{n-1}U_n-1}{2^nU_n}=\frac{2^{n-1}U_n}{2^nU_n}$$

$$=\frac{2^{n-1}}{2^n}=2^{n-1-n}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

إذن المتتالية (V_n) هي بالفعل حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

ب- كتابة V_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من IN

بما أن (V_n) حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0=\frac{1}{2^0U_0}=\frac{1}{1.1}=1$$

فإن : $V_n=V_0+nr$

وبالتالي فإن : $V_n=1+\frac{1}{2}n$ لكل n من IN

- **الاستنتاج**

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $V_n=\frac{1}{2^nU_n}$

إذن : $U_n=\frac{1}{2^nV_n}$

$$=\frac{1}{2^n(1+\frac{1}{2}n)}=\frac{1}{2^n+2^{n-1}n}$$

وبالتالي فإن :

$U_n=\frac{1}{2^{n-1}(2+n)}$ لكل n من IN

ج- تحديد نهاية (U_n)

لدينا : $U_n=\frac{1}{(n+2)2^{n-1}}$ لكل n من IN

وبما أن : $\lim_{n\to+\infty}(n+2)=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}2^{n-1}=+\infty$ (لأن $2\succ1$)

فإن : $\lim_{n\to+\infty}(n+2)2^{n-1}=+\infty$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+2)2^{n-1}}=0$

أي أن : $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$