1-أ-)

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x+2)(x-3)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب-) $\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2\sqrt{(x+2)(x+3)}}{x+2}$

$=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2(x+2)(x+3)}{(x+2)\sqrt{(x+2)(x+3)}}=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2(x+3)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$

بما أن $\lim_{x\to-2}2(3-x)=10$

$\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\sqrt{(x+2)(x+3)}=0^+$

فإن $\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{f(x)}{x+2}=+\infty$

$\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x-3}$

$=\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}=+\infty$

$\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{f(x)}{x-3}=+\infty$

$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}{x-3}$

$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{-2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=-\infty$

$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{f(x)}{x-3}=-\infty$

2-أ-)

$\begin{cases}f(x)=2\sqrt{(x+2)(3-x)};-2\prec x\prec3\\ f(x)=2\sqrt{(x+2)(x-3)};x\succ3\end{cases}$

إذا كان $x\in]-2,3[$

فإن $f'(x)=\frac{2[(x+2)(3-x)]}{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

أي أن $(\forall x\in]-2,3[)\ \ f'(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ على $]-2,3[$ هي إشارة $1-2x$ (لأن $\sqrt{(x-2)(3-x)}\succ0$)

إذا كان $x\in]3,+\infty[$

فإن $f'(x) = 2\frac{[(x+2)(x-3)]'}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}$

$(\forall x \in]3,+\infty[)\ f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{(x+2)(x-3)}}$

$x \succ 3 \Rightarrow x \succ \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1 \succ 0$

$\Rightarrow f'(x) \succ 0$

إذن $\forall x \in]3,+\infty[\ f'(x) \succ 0$

ب-

x	−2		1/2		3		+∞
f'(x)	‖	+	0	−	‖	+	
f(x)	0	↗	5	↘	0	↗	+∞

3-أ)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-x-6}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x^2 1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}2\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}} = 2$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{(x+2)(x-3)}-2x\right]$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)(x-3)-x^2}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{6-x}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{x}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x}}+1} = -1$$

إذن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب-) ليكن x عنصرا من $]3,+\infty[$

$$f(x)-(2x-1) = 2\sqrt{(x+2)(x-3)}-(2x-1)$$

$$= \frac{4(x+2)(x-3)-(2x-1)^2}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)}$$

$$= \frac{-25}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)} \prec 0$$

لكل x من $]3,+\infty[$; $f(x) \prec 2x-1$

إذن المستقيم (D) يوجد تحت المنحنى (C) على المجال $]3,+\infty[$.