1 - نضع $Z=(1-i)z$ ، تصبح المعادلة على الشكل: $(*)Z^5=-i$

نضع $Z=[\rho,\theta]$ على الشكل المثلثي

ولدينا $-i=\left[1,\frac{3\pi}{2}\right]$

إذن المعادلة (*) تكتب على الشكل $[\rho,\theta]^5=\left[1,\frac{3\pi}{2}\right]$

أي أن : $\left[\rho^5,5\theta\right]=\left[1,\frac{3\pi}{2}\right]$

يعني أن $\begin{cases}\rho^5=1\\ 5\theta=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$

مع k ينتمي إلى المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$

ومنه $\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{3\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\end{cases}$ و $k\in\{0,1,2,3,4\}$

وبالتالي (*) تقبل خمسة حلول هي:

$$(1)\quad Z_0=\left[1,\frac{3\pi}{10}\right]$$

$$(2)\quad Z_1=\left[1,\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right]=\left[1,\frac{7\pi}{10}\right]$$

$$(3)\quad Z_2=\left[1,\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}\right]=\left[1,\frac{11\pi}{10}\right]$$

$$(4)\quad Z_3=\left[1,\frac{3\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}\right]=\left[1,\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$(5)\quad Z_4=\left[1,\frac{3\pi}{10}+\frac{8\pi}{5}\right]=\left[1,\frac{19\pi}{10}\right]$$

بما أن $Z(1-i)z$ فإن $z=\frac{Z}{1-i}$

و $1-i=\left[\sqrt{2},\frac{-\pi}{4}\right]$ إذن $z=[\rho,\theta]\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right]$

$$=\left[\frac{\rho}{\sqrt{2}},\theta+\frac{\pi}{4}\right]$$

ومن تم حلول المعادلة $[(1-i)z]^5=-i$ هي

$$z_0=Z_0\times\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{11\pi}{20}\right]$$

$$z_1=Z_1\times\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{19\pi}{20}\right]$$

$$z_2=Z_2\times\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{27\pi}{20}\right]$$

$$z_3 = Z_3 \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\pi}{4}\right]$$

$$z_4 = Z_4 \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{43\pi}{20}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{20}\right]$$

2-1- أ) لدينا $(-1+3i)^2 = -8-6i$

ب) مميز المعادلة هو : $\Delta = (3-i)^2 - 16$

$= -8-6i$

$= (-1+3i)^2$

إذن حلي المعادلة هما : $z_1 = \dfrac{3-i-1+3i}{2}$

$= 1+i$

و $z_2 = \dfrac{3-i+1-3i}{2}$

$= 2-2i$

2-أ) ABC متساوي الساقين رأسه C إذا وفقط إذا كان $BC = AC$

يعني $|bi-(2-2i)| = |bi-(1+i)|$

$|bi-(2-2i)|^2 = |bi-(1+i)|^2$

يعني $|-2+(2+b)i|^2 = |-1+(b-1)i|^2$

يعني $4+(b+2)^2 = 1+(b-1)^2$

أي $b = -1$

ب)

لدينا $CA^2 + CB^2 = 2CA^2$

و $CA^2 = |-1+i+i|^2$

$= |1+2i|^2 = 5$

و $AB^2 = |2-2i-1-i|^2$

$= 10$

إذن $AB^2 = CA^2 + CB^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس فإن ABC قائم في C .