1- لدينا $u_0 = 0$ إذن $0 \leq u_0$

نفترض أن $0 \leq u_p$

$$u_p \geq 0 \Rightarrow (1+3u_p \geq 0 \text{ و } 3+u_p \succ 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1+3u_p}{3+u_p} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{p+1} \geq 0$$

إذن : $u_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا $u_0 = 0$ إذن $u_0 \leq 1$

نفترض أن $u_p \leq 1$

ونبين أن $u_{p+1} \leq 1$

$$u_{p+1} - 1 = \frac{1+3u_p}{3+u_p} - 1$$

$$= \frac{1+3u_p - 3 - u_p}{3+u_p}$$

$$= \frac{2(u_p - 1)}{3+u_p}$$

إذا كان $u_p \leq 1$ فإن $u_p - 1 \leq 0$

وبما أن $u_p \geq 0$ فإن $3+u_p \succ 0$

إذن : $u_p \leq 1 \Rightarrow \frac{2(u_p-1)}{3+u_p} \leq 0$

$$\Rightarrow u_{p+1} \leq 1$$

وبالتالي فإن $u_n \leq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $0 \leq u_n \leq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

(1-2 لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n$

$$= \frac{1+3u_n - 3u_n - u^2}{3+u_n}$$

إذن : $= \frac{1-u_n^2}{3+u_n} = \frac{(1+u_n)(1-u_n)}{3+u_n}$

بما أن $0 \leq u_n \leq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

فإن $1+u_n \succ 0$ و $1-u_n \geq 0$ و $3+u_n \succ 0$

أي أن : $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن : $u_{n+1} \geq u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

يعني أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ب-) بما أن (u_n) متتالية مكبورة بالعدد 1. (لأن $u_n \leq 1$)

وبما أنها تزايدية فإنها متقاربة.
نضع $\lim u_n = \ell$

3-نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,1]$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

الدالة g متصلة على $[0,1]$ (لأنها قصور دالة جذرية)

و $g'(x)=\dfrac{8}{(x+3)^2}$ $(\forall x\in[0,1])$

بما أن : $g'(x)\succ 0$ $(\forall x\in[0,1])$

فإن g دالة تزايدية على $[0,1]$

إذن $g([0,1])=\left[\dfrac{1}{3},1\right]$

وبالتالي فإن $g([0,1])\subset[0,1]$

ولدينا : $g(u_n)=u_{n+1}$

إذن ℓ نهاية (u_n) هي حل المعادلة $g(x)=x$

يعني أن : $\ell=\dfrac{1+3\ell}{3+\ell}$

أي أن : $3\ell+\ell^2=3\ell+1$

إذن $\ell^2=1$ أي $\ell=1$ أو $\ell=-1$

وبما أن (u_n) متتالية موجبة فإن $\lim u_n=1$