-1 الدالة $P : x \mapsto x^2 + 2x$ متصلة على $\mathbb{R}$
إذن فهي متصلة على $]0,2[$. كما أن صورة هذا المجال هو المجال $]0,8[$
الدالة $x \mapsto \sqrt[3]{\sqrt{x}}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ إذن فهي متصلة على $]0,8[$.
وبالتالي الدالة $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ متصلة على $]0,2[$.
بنفس الطريقة نثبت أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0,2[$.كمركب دالتين تزايديتين قطعا.
ملحوظة: يمكن أيضا استعمال المشتقة 'f للبرهان على رتابة f .

$$\forall x \in]0,2[\quad f'(x) = \frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}} \succ 0$$

-2 لدينا $\lim_{0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{2^-} f(x) = 2$
بما أن f تزايدية قطعا على $]0,2[$
فإن $f(]0,2[) = \left]\lim_{0^+} f, \lim_{2^-} f\right[$
إذن : $=]0,2[$

-3 أ - لدينا من جهة $0 \prec u_0 \prec 2$
ومن جهة ثانية إذا كان $0 \prec u_n \prec 2$
فإن $0 \prec f(u_n) \prec 2$
يعني أن $0 \prec u_{n+1} \prec 2$
إذن : $0 \prec u_n \prec 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n}\sqrt[3]{u_n^2 + 2u_n}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{u_n} + \frac{2}{u_n^2}}$$

بما أن $0 \prec u_n \prec 2$ فإن $0 \prec u_n^2 \prec 4$
ومنه $\frac{1}{u_n} \succ \frac{1}{2}$ و $\frac{2}{u_n^2} \succ \frac{1}{2}$
وبالتالي $\frac{1}{u_n} + \frac{2}{u_n^2} \succ 1$
ومنه $\sqrt[3]{\frac{1}{u_n} + \frac{2}{u_n^2}} \succ 1$
يعني $\frac{u_{n+1}}{u_n} \succ 1$
وبالتالي $u_{n+1} \succ u_n$ وهو ما يعني أن (u_n) تزايدية

ج- المتتالية (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 2.

إذن فهي متقاربة.

نضع $\ell = \lim u_n$

بما أن $u_{n+1} = f\,(u_n)$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

فإن ℓ تحقق المعادلة $\ell = f\,(\ell)$

لدينا : $\ell = \sqrt[3]{\ell^2 + 2\ell} \Leftrightarrow \ell^3 - \ell^2 - 2\ell = 0$

$$\Leftrightarrow \ell(\ell^2 - \ell - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(\ell + \ell)(\ell - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ell = 0 \text{ أو } \ell = -1 \text{ أو } \ell = 2)$$

لدينا $0 \prec u_n \prec 2$ و $u_n \succ u_0 = \dfrac{1}{2}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

إذن $\dfrac{1}{2} \prec u_n \prec 2$

أي أن : $\dfrac{1}{2} \le \ell \le 2$

وبالتالي الحلين $\ell = 0$ و $\ell = -1$ غير مقبولين

إذن $\ell = 2$ ومنه $\lim u_n = 2$