الـجزء الأول :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

1) * لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{t \to -\infty} t^2 e^{t} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) x^2 e^{-x}\right]$

$$= 1 - 1.0 = 1$$

* لدينا :

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 2) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

2) * لدينا :

$$\forall x \in IR \quad g'(x) = -(2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

$$= \left(x^2 - 2x - 2x + 2 + 2\right)e^{-x}$$

$$= \left(x^2 - 4x + 4\right)e^{-x}$$

إذن : $\boxed{g'(x) = (x-2)^2 e^{-x}}$

* بما أن $e^{-x} > 0$ و $(x-2)^2 \geq 0$ لكل x من IR فإن $g'(x) \geq 0$ لكل x من IR.

ب -

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	
$g(x)$	$-\infty$		↗		1

3) ⁎ بما أن g دالة متصلة وتزايدية قطعا على IR و $g(IR) =]-\infty, 1[$

و $0 \in]-\infty, 1[$، وحسب مبرهنة القيم الوسطية، فإن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في IR.

لدينا $g(0,3) = 1 - 1,49.\, e^{-0,3} < 0$ و $g(0,4) = 1 - 1,36.\, e^{-0,4} > 0$

(لأن $g(0,3) \approx -0,10$ و $g(0,4) \approx 0,08$)

إذن $0,3 < \alpha < 0,4$

4) بما أن g دالة تزايدية قطعا على IR و $g(\alpha) = 0$ فإن :

$$x > \alpha \Leftrightarrow g(x) > 0$$
$$x < \alpha \Leftrightarrow g(x) < 0$$
$$x = \alpha \Leftrightarrow g(x) = 0$$

الجزء الثاني :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\, e^{-x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) x^2 e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) + \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} + \left(x + \frac{2}{x}\right) e^{-x}\right)$$
$$= +\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \dfrac{2}{x}\right)e^{-x} = -\infty$)

2) أ ـ $\forall x \in IR \quad f'(x) = 1 + 2x\, e^{-x} - \left(x^2 + 2\right) e^{-x}$

$$= 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{-x}$$

إذن $\boxed{\forall x \in IR \quad f'(x) = g(x)}$

ب ـ ⁎ لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ أي

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha$$
$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3) لدينا $g(\alpha) = 0$ أي $(\alpha^2 - 2\alpha + 2)\, e^{-\alpha} = 1$

إذن $(\alpha^2 + 2)\, e^{-\alpha} = 1 + 2\alpha e^{-\alpha}$ وبالتالي $f(\alpha) = \alpha - 1 + 1 + 2\alpha e^{-\alpha}$

إذن $\boxed{f(\alpha) = \alpha\,(1 + 2\, e^{-\alpha})}$

4) أ ـ لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 2)\, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} [(-x)^2\, e^{-x} + 2\, e^{-x}] = 0$$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2)e^{-x} = 0$

وهذا يعني أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$.

ب - لدينا $f(x) - (x - 1) = (x^2 + 2)e^{-x}$

بما أن $x^2 + 2 > 0$ و $e^{-x} > 0$ لكل x من IR فإن

$$\forall x \in IR \qquad (x^2 + 2)e^{-x} > 0$$

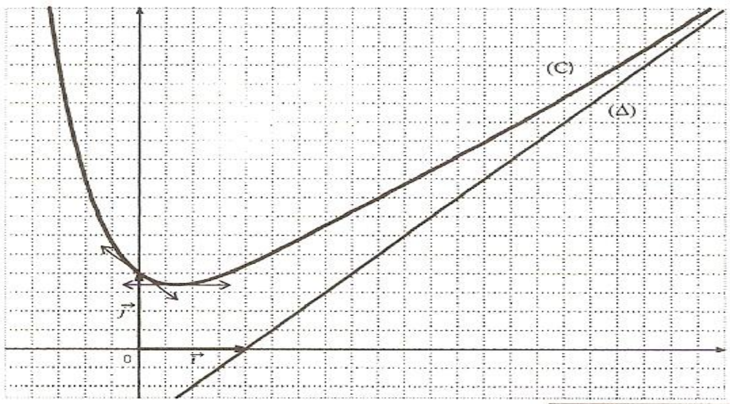
وبالتالي فإن $\forall x \in IR \qquad f(x) - (x - 1) > 0$

إذن المنحنى (C) يوجد فوق المستقيم (Δ).

5) أ - لدينا $f(0) = 1$ و $f'(0) = -1$

إذن $y = -x + 1$ هي معادلة المماس (T) في النقطة ذات الأفصول 0.

ب -



إعداد الأستاذ : عبد المنعم الغازي