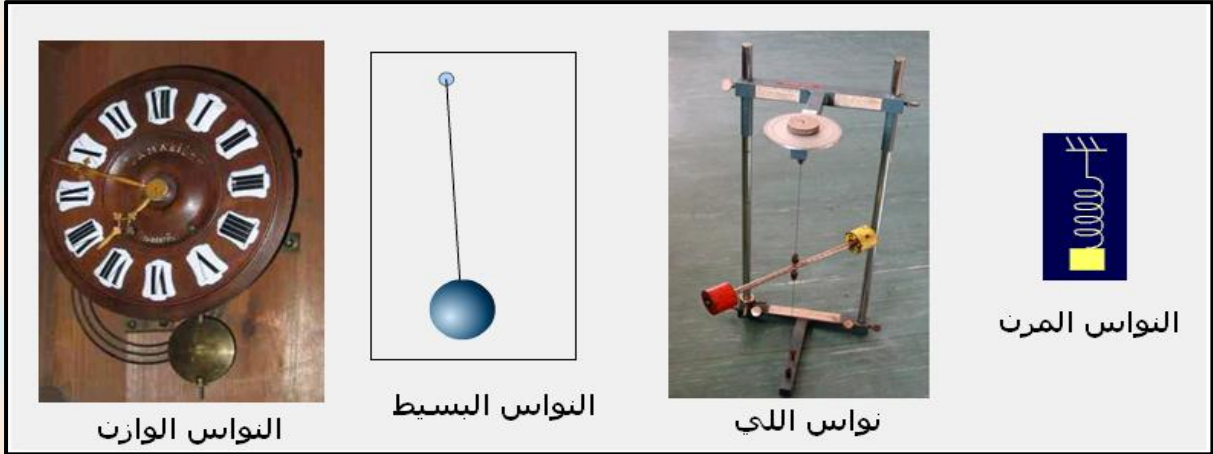


المتذبذبات الميكانيكية

تقديم مجموعات ميكانيكية متذبذبة



1 - تعريف بالمجموعة الميكانيكية المتذبذبة

المجموعة الميكانيكية هي مجموعة تنجز حركة دورية حول موضع توازنها المستقر .
الحركة الدورية : هي حركة تتكرر مماثلة لنفسها خلال مدد زمنية متساوية .

2 - الحركة التذبذبية ومميزاتها .

2 - 1 تعريف

الحركة التذبذبية هي حركة ذهاب وإياب حول موضع معين ، وهي حركة تميز المتذبذبات الميكانيكية .
هناك ثلاثة أنواع للحركة التذبذبية :

- ☞ الحركة التذبذبية الحرة : هي التي ينجزها متذبذب ميكانيكي دون اكتساب طاقة ما من المحيط الخارجي بعد إحداث حركته .
- ☞ الحركة التذبذبية المصانة : هي التي ينجزها المتذبذب وذلك بتعويض الطاقة المفقودة خلال التذبذبات بواسطة جهاز خارجي . مثال الساعة الحائطية .
- ☞ الحركة التذبذبية القسرية : عندما تفرض مجموعة ميكانيكية تسمى بالمثير تردد لذبذبات على المجموعة المتذبذبة والتي تسمى بالرنان .

2 - 2 مميزات الحركة التذبذبية

أ - موضع التوازن المستقر

كل متذبذب ميكانيكي حر لا يمكنه أن ينجز حركته التذبذبية إلا حول موضع توازنه المستقر .

ب - وسع الحركة

وسع الحركة لمتذبذب ميكانيكي حر و غير مخمد هو القيمة القصوى الموجبة التي يأخذها المقدار الذي يعبر عن مدى ابتعاد أو انحراف المتذبذب عن موضع توازنه المستقر .
بالنسبة للنواس الوزن والنواس البسيط ونواس اللي نستعمل الأضلاع الزاوي θ .
بالنسبة للنواس المرن ، نستعمل الأضلاع x (حركة إزاحة مستقيمة) .

3 _ 1 تعريف

النواس المرن مجموعة ميكانيكية متذبذبة تتكون من جسم صلب مرتبط بأحد طرفي نابض صلابته k ذي لفات غير متصلة وكتلته مهملة ، ثبت طرفه الآخر بحامل .

k ثابتة تتعلق بشكل النابض وبطبيعته

عند إزاحة الجسم عن موضع توازنه المستقر وفق اتجاه محور النابض وتحريره ، فإنه ينجز حركة تذبذبية حرة حول هذا الموضع . نعلم مواضع مركز قصور النواس المرن في معلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامد وممنظم محوره (O, \vec{i})

أفقي بالأفصول $x(t)$

بحيث أن : $\overline{G_{\text{eq}}} \vec{G} = x(t) \vec{i}$. موضع G عند التوازن المستقر .

أثناء الحركة الحرة وغير المخمدة للنواس ، تأخذ x قيمة موجبة أكبرها x_m وقيمة سالبة أصغرها $-x_m$ ، نسمي x_m وسع الحركة للنواس المرن .

3 _ 2 دراسة ذبذبات المجموعة { جسم صلب - نابض }

أ _ قوة الارتداد المطبقة من طرف نابض على الجسم

عند إزاحة الجسم عن موضع توازنه وتحريره ، تتجز المجموعة حركة تذبذبية تحت تأثير مجموعة من القوى :

\vec{P} : وزن الجسم

\vec{R} : تأثير السطح على الجسم (غياب الاحتكاك \vec{R} عمودية على السطح) ،

\vec{F} : القوة المطبقة من طرف النابض على الجسم وهي قوة ارتداد تسعى إلى إرجاع الجسم إلى موضعه البدئي .

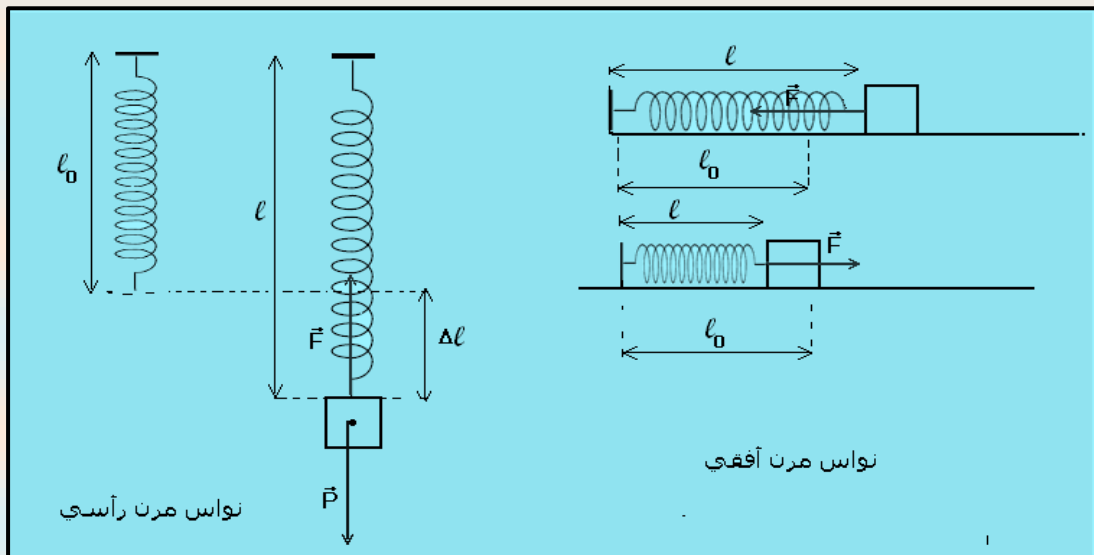
ب _ مميزات قوة الارتداد

نقطة التأثير : نقطة التماس الجسم والنابض .

خط التأثير : محور النابض

المنحى : موجه نحو داخل النابض في حالة النابض مطالا ، أو خارجه في حالة النابض مكبوس أو مضغوط

الشدة : $F = k\Delta\ell = k(\ell - \ell_0)$ حيث k صلابة النابض و $\Delta\ell$ إطالته بالمر و ℓ_0 طوله البدئي ، ℓ طوله النهائي .



3 _ 3 _ المعادلة التفاضلية

المعادلة التفاضلية للنواس المرن : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

حل المعادلة التفاضلية :

معادلة تفاضلية خطية حلها بصيغة عامة يكتب على الشكل التالي : $x(t) = x_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ حيث :

. $(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$: طور التذبذبات عند اللحظة t وحدته rad .

. φ طور التذبذبات عند اللحظة t=0 نعب عنه ب rad .

x_m وسع الحركة بالمتر (m)

T_0 الدور الخاص للتذبذبات ب s

– تعبير الدور الخاص : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

m كتلة الجسم (S) ب kg و k صلابة النابض ب (N/m)

نعب كذلك عن التردد الخاص للتذبذبات بالعلاقة التالية : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

وحدة التردد في النظام العالمي للوحدات هي الهرتز . (Hz)

3 - 4 خمود التذبذبات الميكانيكية

أ - ظاهرة الخمود

عند إزاحة متذبذب ميكانيكي (النواس المرن) عن موضع توازنه المستقر وتحريره ، فإنه ينجز ذبذبات حرة يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن ، إلى أن يتوقف عند موضع توازنه المستقر ، تسمى هذه الظاهرة : بالخمود الميكانيكي .

تعزى هذه الظاهرة إلى الاحتكاكات والتي يمكن تصنيفه إلى نوعين :

– احتكاكات صلبة والتي ينتج عنها خمود صلب للتذبذبات .

– احتكاكات مائعة والتي ينتج عنها خمود مائع للتذبذبات .

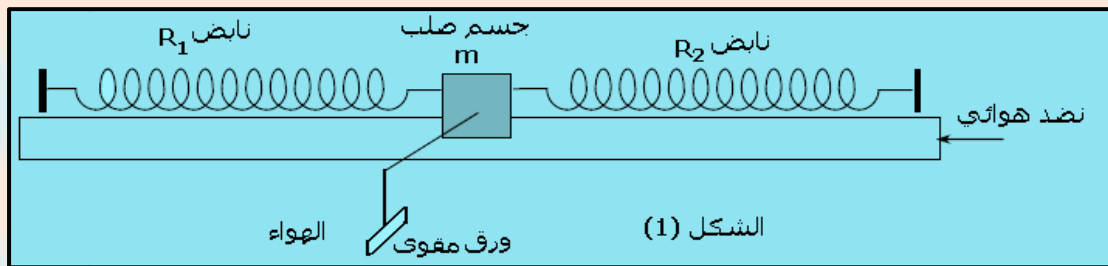
ب - أنظمة خمود التذبذبات الميكانيكية .

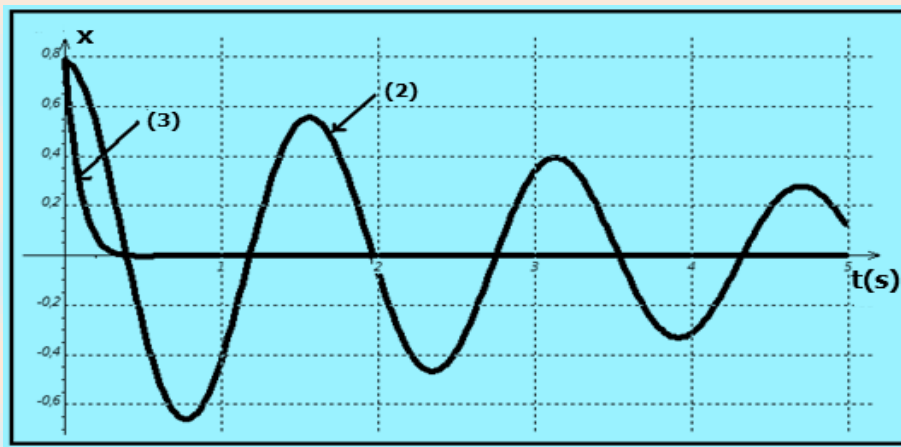
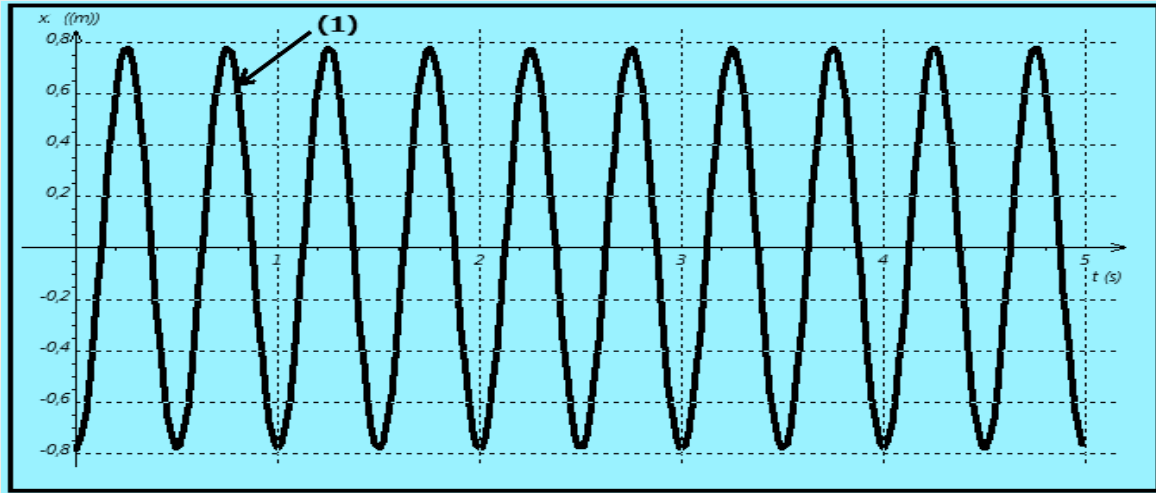
الخمود بالاحتكاكات المائعة :

نشغل المعصفة ونزيع الخيال عن موضع توازنه ، ثم نحرره بدون سرعة بدئية . فنحصل على المنحنى (1)

ثبت على الخيال قطعة من الورق المقوى ونعيد نفس التجربة فنحصل على المنحنى (2) مساحة الورق المقوى S_1 و منحنى

(3) مساحة الورق المقوى S_2 بحيث أن $S_2 > S_3$.





– حالة الخمود الضعيف : النظام شبه الدوري .
 في هذه الحالة ينجز المتذبذب الميكانيكي ذبذبات يتناقص وسعها تدريجيا إلى أن يستقر المتذبذب عند موضع توازنه المستقر .
 كما أنه في هذه الحالة أن حركة المتذبذب ليست دورية نقول إنها شبه دورية ودورها T يقارب الدور الخاص T_0 للمتذبذب .
 عموما $(T_0 < T)$. نسمي T شبه الدور .

شبه الدور بالنسبة لمتذبذب ميكانيكي خموده ضعيف هو المدة الزمنية T التي تفصل مرورين متتاليين للمتذبذب من موضع توازنه المستقر في نفس المنحى .

ملحوظة : كلما كان خمود المتذبذب ضعيفا ، كلما تهاهى شبه الدور T نحو الدور الخاص T_0 .
 – يكون الخمود مهما ، كلما تناقص وسع الحركة بشدة إلى أن ينعدم خلال فترة زمنية وجيزة .

ب – حالة الخمود الحاد : النظام اللادوري .

في هذه الحالة تكون حركة المتذبذب غير دورية ، نقول أنها لا دورية ، وحسب أهمية الخمود ، نحصل على الحالات التالية :
 – النظام تحت الحرج : ينجز المتذبذب ذبذبة واحدة قبل أن يتوقف .
 – النظام الحرج : حيث يعود المتذبذب إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب .
 – النظام فوق الحرج : حيث يستغرق المتذبذب وقتا طويلا لكي يرجع إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب .
 ملحوظة : لصيانة حركة تذبذبية نوظف بعض الأجهزة الميكانيكية تكمن وظيفتها في تعويض الطاقة المبددة في كل دور .

3 - 5 _ ظاهرة الرنين الميكانيكي

تعريف الذبذبات القسرية

تنجز مجموعة ميكانيكية ذبذبات قسرية عندما يفرض مشير دوره على هذه المجموعة التي تسمى بالرنان يتذبذب الرنان بنفس الدور T للمشير

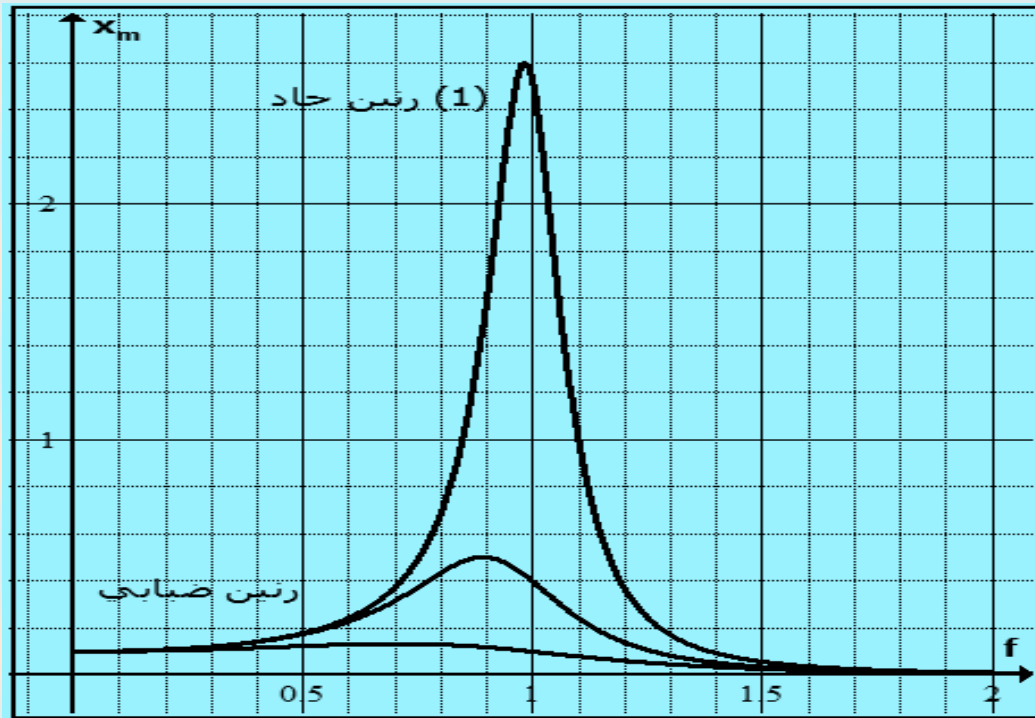
ظاهرة الرنين الميكانيكي :

عند الرنين :

- وسع تذبذبات الرنان يكون قصويا
- دور المشير ودور الرنان يكونا متقاربين جدا .

تأثير الخمود على الرنين :

- ✓ في حالة الخمود الضعيف للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات القسرية عند الرنين قيمة كبيرة ، نقول أن الرنين حادا .
- ✓ في حالة الخمود القوي للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات القسرية عند الرنين قيمة صغيرة ، نقول إن الرنين ضبابي
- ✓ تناقص وسع الذبذبات القسرية مع زبايد خمود ذبذبات الرنان



4) نواس اللي :

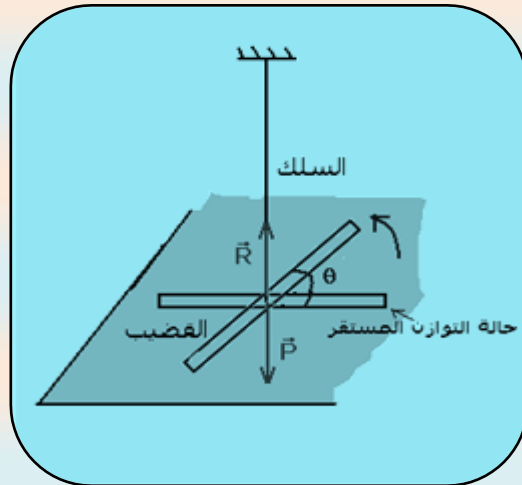
4 - 1 _ مزدوجة الارتداد المطبقة من طرف سلك اللي .

عند تطبيق مزدوجة قوتين على قضيب معلق بسلك ، فإن هذا الأخير يلتوي . وعند حذف المزدوجتين ، يعود السلك إلى موضع توازنه بفعل قوة الارتداد التي تطبقها مولدات السلك على القضيب وموجوع هذه القوى يكون مزدوجة تسمى بمزدوجة اللي ونرمز لها ب \mathcal{M}_C .

عزم هذه المزدوجة مستقل عن المحور ونعبر عنه بالعلاقة التالية : $\mathcal{M}_C = -C.\theta$ بحيث أن C ثابتة لي السلك وحدتها هي N.m.rad^{-1} و θ زاوية اللي ب rad تتعلق ثابتة اللي بطول السلك وبمقطعه وبنوعيته .

4 - 2 _ المعادلة التفاضلية لحركة الجسم الصلب وحلها .

نعتبر نواس اللي في توازنه المستقر . ندير القضيب عن موضع توازنه بالزاوية θ_m ، ونحرره بدون سرعة بدئية ، فينجز القضيب حركة تذبذبية حرة حول موضع توازنه المستقر .



نعتبر الاحتكاكات مهملة . J_Δ عزم قصور القضيبي بالنسبة للمحور (Δ) المجسد بالسلك . و C ثابتة اللي للسلك . ندرس حركة القضيب في مرجع مرتبط بالأرض والذي نعتبره مرجعا غاليليا ، ونعلم موضع القضيب بأفصوله الزاوي θ والذي نقيسه بالنسبة لاتجاه مرجعي وهو اتجاه القضيب عند التوازن .

تكون المعادلة التفاضلية لحركة القضيب هي :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta} \theta = 0$$

حل المعادلة التفاضلية يكون على الشكل التالي : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

θ_m و φ تتعلقان بالشروط البدئية للحركة .

4 - 3 _ الدور الخاص :

الدور الخاص للنواس اللي الحر هو كالتالي :

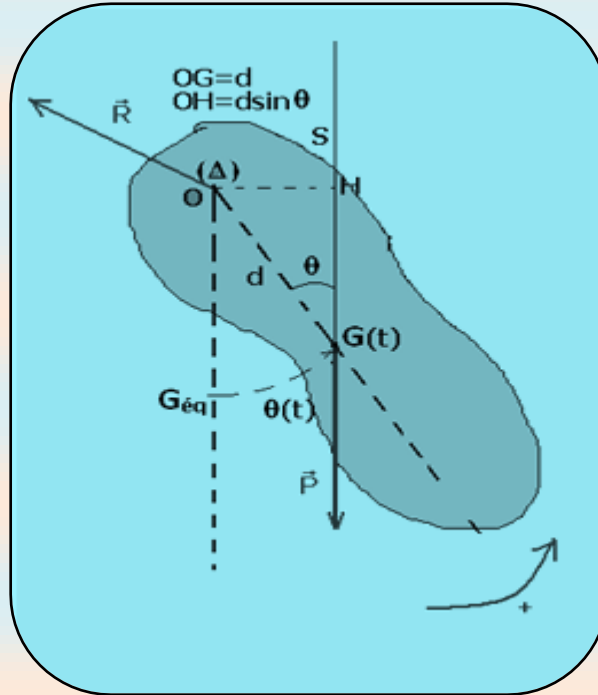
حيث $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$ عزم قصور القضيبي (الجسم الصلب) بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه kg.m^2 و C ثابتة اللي للسلك نعبر عنها N.m.rad^{-1} .

التردد الخاص لنواس اللي هو :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

5 - 1 _ المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وحلها .

- المجموعة المدروسة : الجسم (S) كتلته m وعزم قصوره بالنسبة لمحور الدوران Δ الأفقي J_Δ .
 المعلم : مرتبط بالأرض والذي نعتبره مرجعا غاليليا .
 في كل لحظة نمعلم موضع النواس G بالأفصول الزاوي $\theta(t)$



جرد القوي المطبقة على المجموعة :

– وزنها \vec{P}

– تأثير المحور Δ على المجموعة \vec{R} .

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة في حالة الدوران حول المحور Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$

بما أن خط تأثير القوة \vec{R} يتقاطع مع محور الدوران Δ فإن عزمها منعدم بالنسبة لهذا المحور : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

وبالتالي : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$

لدينا : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$ أي أن (1) $-mgd \sin \theta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \sin \theta = 0$

العلاقة التي تم التوصل إليها هي المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وهي غير خطية وبالتالي فحلها ليس جيبيا .

أ - حالة الذبذبات ذات وسع صغير .

تعتبر الذبذبات ذات وسع صغير إذا كانت $\theta \leq 15^\circ$ بعني أن $\theta \leq 0,26 \text{ rad}$ في هذه الحالة تكون $\sin \theta \approx \theta$ وتصبح المعادلة التفاضلية

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \theta = 0 \quad (2)$$

قياسا مع ما سبق حل هذه المعادلة التفاضلية هو على الشكل التالي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

ب - الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير .

الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgd}}$$

J_{Δ} عزم قصور الجسم بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه ب (kg.m^2)

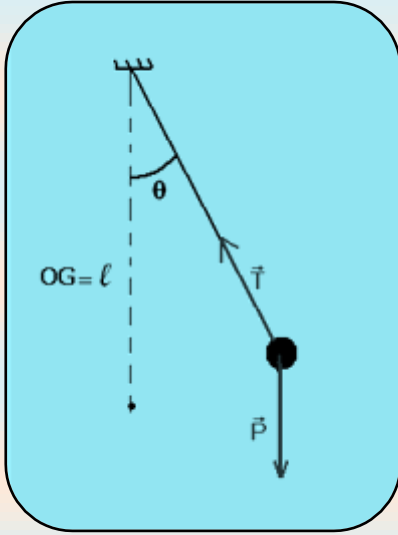
d المسافة الفاصلة بين المحور Δ و مركز قصور المجموعة المتذبذبة . ب (m)

m كتلة المجموعة ونعبر عنها ب (kg)

g شدة الثقالة (m/s^2) .

تعبير التردد الخاص f_0 لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة غير مخمدة و ذات وسع صغير : $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J_{\Delta}}}$

5 - 2 - النواس البسيط



النواس البسيط هو نموذج مثالي للمتذبذب ميكانيكي .

وهو حالة خاصة للنواس الوازن حيث :

$d = \ell$ و $J_{\Delta} = m\ell^2$ في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية

على الشكل التالي : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

وتقبل هذه المعادلة كحلا لها : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

وتمثل المعادلة الزمنية لحركة النواس البسيط .

تعبير الدور الخاص للنواس البسيط : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

حيث ℓ طول النواس البسيط ب m و g شدة مجال

الثقالة (m/s^2) .

طول النواس البسيط المتواقت مع النواس البسيط :

نقول أن النواس البسيط متواقت مع النواس الوازن إذا كان لهما نفس الدور

أي أن دور النواس البسيط = دور النواس الوازن .

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgd}} \Rightarrow \ell = \frac{J_{\Delta}}{md}$$