1) ـ لكل x من $]-\infty, 1]$: $1 + \sqrt{1-x} > 0$ إذن $D =]-\infty, 1]$

ـ نضع $X = \sqrt{1-x}$ ؛ إذا كان $x \to -\infty$ فإن $X \to +\infty$

إذن : $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2\ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right) = \lim_{X \to +\infty} 2\ln\left(\frac{1}{1+X}\right)$$

$$= \lim_{X \to +\infty} 2\ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\infty$$

2) ـ نضع $X = \sqrt{1-x}$ ، إذا كان $x < 1$ فإن $X > 0$

إذن : $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \ln(1+\sqrt{1-x}) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \frac{\ln(1+X)}{X}$$
$$= 1$$

ـ ندرس قابلية إشتقاق f على اليسار في النقطة 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2\ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2\ln(1+\sqrt{1-x})}{1-x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\ln(1+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}$$
$$= +\infty$$

(لأن $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\ln(1+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} = 1$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2}{\sqrt{1-x}} = +\infty$)

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$

وهذا يعني أن f غير قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة 1.

3) - نحسب $f'(x)$:

لكل x من $]-\infty, 1[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{1-x}}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1-x})}$$

لاحظ أن $f'(x) > 0$ لكل x من $]-\infty, 1[$

ملاحظة : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 0 = f(1)$

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0

4) نضع : $X = 1 + \sqrt{1-x}$ ، إذا كان $x \to -\infty$ فإن $X \to +\infty$ إذن :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{1-x})}{1+\sqrt{1-x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$$

نضع $X = 1 - \sqrt{1-x}$ ، إذا كان $x \to -\infty$ فإن $X \to -\infty$ إذن :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \lim_{X \to -\infty} \frac{1}{X} = 0$$

ومنه :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)}{x}$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{2\ln(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\ln(1+\sqrt{1-x})}{1+\sqrt{1-x}}$$

$$= 0 \,.\, 0$$
$$= 0$$

بالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ وهذا يعني أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل جوار $-\infty$

5) - بما أن الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على D فإنها تقابل من D نحو المجال $J = f(D)$

$$f(D) = f(]-\infty, 0]) =]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(0)] =]-\infty, 0]$$

إذن : $J =]-\infty, 0]$

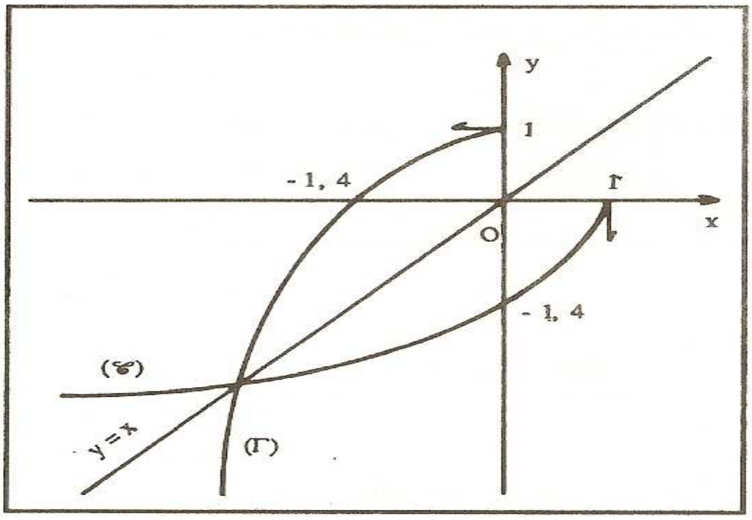
• نبين أن : $\forall x \in]-\infty, 0]\ ;\ f^{-1}(x) = 2e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}$

لكل y من $]-\infty, 1]$ ولكل x من $]-\infty, 0]$

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = 2\ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-y}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\ln(1+\sqrt{1-y})$$
$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1-y} = e^{-\frac{x}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 1-y = \left(e^{-\frac{x}{2}} - 1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow y = 2e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}$$

إذن : $\forall x \in]-\infty, 0] : f^{-1}(x) = 2e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}$

(6



7) أ- لدينا : $(f^{-1})'(x) = -e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}$: $(\forall x \in]-\infty, 0])$

إذن : $(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) = \left(-e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}\right) + \left(2e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}\right)$

$$= e^{-\frac{x}{2}}$$

وهذا يعني أن الدالة f^{-1} حل للمعادلة (E) .

ب- لدينا :
$$\begin{cases} y' + y = e^{-\frac{x}{2}} & (1) \\ (f^{-1})' + f^{-1} = e^{-\frac{x}{2}} & (2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نجد :

$$(y - f^{-1})' + (y - f^{-1}) = 0 \Leftrightarrow (y - f^{-1})' = -(y - f^{-1})$$

إذن $(y - f^{-1})(x) = \alpha e^{-x}$

يعني أن : $y(x) = \alpha e^{-x} + f^{-1}(x)$

$$= \alpha e^{-x} + 2e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}$$

$$= (\alpha - 1)e^{-x} + 2e^{-\frac{x}{2}}$$

وبالتالي حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة بما يلي :

$y : x \rightarrow (\alpha - 1)e^{-x} + 2e^{-\frac{x}{2}}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

تابع باقي تمارين الرياضيات مع الشامل

Equipe Achamel