I - 1) .
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 > 0\}$$
$$=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

. لكل x من D_f : $-x \in D_f$ و

$$f(-x) = \ln\sqrt{(-x)^2 - 1} + \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1}$$
$$= \ln\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{x^2 - 1}$$
$$= f(x)$$

إذن f دالة زوجية.

2) . لدينا:
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1)\ln\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)$$
$$= 0$$

إذن
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{(x^2 - 1)\ln\sqrt{x^2 - 1} + x^2}{x^2 - 1}$$
$$= +\infty$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$

. لدينا :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln\sqrt{x^2 - 1} = +\infty$$

إذن :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{x^2 - 1}\right) = +\infty$$

3) . لكل x من D_f :

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x}{x^2-1} - \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

وبما أن $(x^2-1)^2 > 0$ لكل x من D_f فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(x^2-3)$

إذن : - إذا كان $x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup]1, \sqrt{3}]$ فإن $f'(x) \leq 0$

- إذا كان $x \in [-\sqrt{3}, -1[\cup [\sqrt{3}, +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$

4) من خلال جدول تغيرات الدالة f على $]1, +\infty[$:

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(3+\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

نستنتج أن $f(x) \geq \frac{1}{2}(3+\ln 2)$ لكل x من $]1, +\infty[$ وبما أن f دالة

زوجية فإن $f(x) \geq \frac{1}{2}(3+\ln 2)$ لكل x من $]1,+\infty[$ وبالتالي :

$$(\forall x \in D_f) \; ; \; f(x) \geq \frac{1}{2}(3+\ln 2) > 0$$

أي : $(\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[) \; ; \; f(x) > 0$

II -1) الدالة $x \to x \ln \sqrt{x^2-1}$ معرفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

والدالة $x \to e^{\frac{x+1}{x-1}}$ معرفة على $[-1,1[$ إذن :

$$D_g = (]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[) \cup ([-1,1[)$$
$$=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

2) ـ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\sqrt{x^2-1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\ln\sqrt{x^2-1} = -\infty$

ـ لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$

ـ لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \ln\sqrt{x^2-1} = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x\ln\sqrt{x^2-1} = -\infty$

ـ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\sqrt{x^2-1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\sqrt{x^2-1} = +\infty$

3) ـ دراسة اتصال f عند النقطة 1 -

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x\ln\sqrt{x^2-1} = +\infty$

إذن g غير متصلة على اليسار في النقطة 1-

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 1$
$$= g(-1)$$

إذن g متصلة على اليمين في النقطة 1- وبالتالي g غير متصلة في النقطة 1- .

ـ دراسة قابلية اشتقاق g عند النقطة 1-

- بما أن g غير متصلة على اليسار في النقطة 1- فإنها غير قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة 1-.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{x+1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\left(\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\frac{x+1}{x-1}} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \frac{e^{X} - 1}{X} = 1 \quad \text{لأن} \right)$$

إذن g قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة 1-. بما أن g غير قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة 1- فإنها غير قابلة للإشتقاق عند النقطة 1-.

4) . لكل x من $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$:

$$g'(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1} + x \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \ln\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$= f(x) > 0$ (من خلال السؤال I - 4)

إذن $g'(x) > 0$ لكل x من $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

. لكل x من : $]-1, 1[$:

$$g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} < 0$$

إذن $g'(x) < 0$ لكل x من $]-1, 1[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	|| $-\frac{1}{2}$	$-$	||	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	|| 1	$\searrow 0$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

5) . $\mathscr{C}_g$ لا يقطع محور الأفاصيل على المجال $]-1, 1[$ لأن :

$e^{\frac{x+1}{x-1}} \neq 0$ لكل x من $]-1, 1[$

. لكل x من $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{x^2-1}=0$ (لأن $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=1$

$\Leftrightarrow x^2=2$

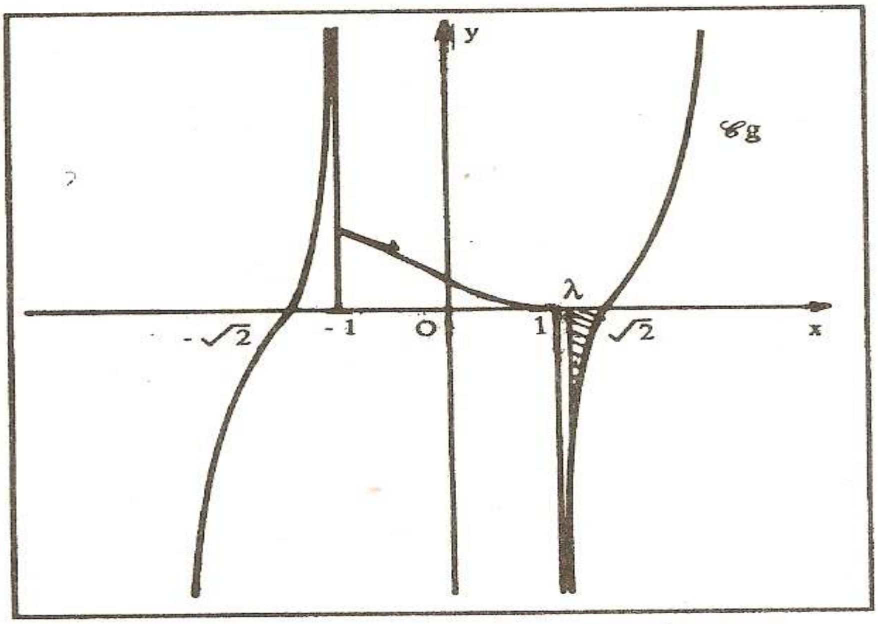
$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

إذن $(\mathscr{C}_g)$ يقطع محور الأفاصيل في النقطتين ذات الأفصولين $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$

6) . بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$ فإن $(\mathscr{C}_g)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$ و $-\infty$.

. لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x)=-\infty$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x=1$ مقارب لـ $\mathscr{C}_g$

. بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)=+\infty$ فإن المستقيم ذي المعادلة $x=-1$ مقارب لـ $\mathscr{C}_g$



7) أ- نضع : $u=\ln\sqrt{x^2-1}$ ، $u'=\frac{x}{x^2-1}$

$v'=x$ ، $v=\frac{x^2}{2}$

إذن :
$$A(\lambda) = -\int_{\lambda}^{\sqrt{2}} x \,\mathrm{Ln}\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\ln\sqrt{x^2-1}\right]_{\lambda}^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{\sqrt{2}} \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\ln\sqrt{\lambda^2-1} + \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{\sqrt{2}} \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\ln\sqrt{\lambda^2-1} + \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{\sqrt{2}} x\,dx + \frac{1}{4}\int_{\lambda}^{\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\ln\sqrt{\lambda^2-1} + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\lambda}^{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\left[\ln|x^2-1|\right]_{\lambda}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\ln\sqrt{\lambda^2-1} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\ln(\lambda^2-1)$$

إذن :
$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2-1}{4}\ln(\lambda^2-1) - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{2}$$

ب- لدينا :
$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ \lambda > 1}} \frac{\lambda^2-1}{4}\ln(\lambda^2-1) = 0$$

إذن
$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ \lambda > 1}} A(\lambda) = \frac{1}{4}$$