1) أ- ليكن x عددا حقيقيا مخالفا للعددين 0 و 1 -.

لدينا :

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x(x+1)+x^2(x+1)-x^3}{x^3(x+1)}$$

$$= \frac{x+1-x^2-x+x^3+x^2-x^3}{x^3(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^3(x+1)}$$

ب- من خلال السؤال السابق لدينا :

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^3}dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + [\ln x]_1^2 - [\ln(x+1)]_1^2$$

$$= -\frac{1}{8} + 2\ln 2 - \ln 3$$

$$= -\frac{1}{8} + \ln\frac{4}{3}$$

2) نحسب التكامل : $\int_1^4 \frac{1}{t^2(1+\sqrt{t})}dt$.

نضع $x=\sqrt{t}$. إذن $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}.dt$ أي $dt = 2x\,dx$

إذا كان $t=4$ فإن $x=2$ وإذا كان $t=1$ فإن $x=1$.

ومنه :

$$\int_1^4 \frac{dt}{t^2(1+\sqrt{t})} = \int_1^2 \frac{2x\,dx}{x^4(1+x)}$$

$$= 2\int_1^2 \frac{dx}{x^3(1+x)}$$

$$= 2\left(-\frac{1}{8}+\ln\frac{4}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + 2\ln\frac{4}{3}$$

الشامل طريق النجاح