ثانوية ابن خلدون التأهيلية

المادة: الرياضيات

درس رقم/ 14

الأستاذ: نجيب عثماني

ملخص لدرس حساب الاحتمالات

مستوى الثانية باك شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

I. المبدأ الأساسي للتعداد:

المبدأ:

لتكن E تجربة تتطلب نتائجها k اختيارا.

إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 طريقة مختلفة, و الاختيار الثاني يتم ب n_2 طريقة مختلفة....و الاختيار k يتم ب n_k طريقة مختلفة. فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$.

II. الترتيبات بتكرار- الترتيبات بدون تكرار- التبديلات:

تعاريف:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$.

- كل ترتيب ل p عنصر مختار من بين n عنصر (مع إمكانية تكرار نفس العنصر) يسمى ترتيبه بتكرار ل p عنصر من بين n.
- كل ترتيب ل p عنصر مختار من بين n عنصر يسمى بدون تكرار ل p عنصر من بين n, حيث $1 \le p \le n$
- كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n يسمى تبديلة ل n عنصر.

III. التأليفات:

تعريف:

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. و لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر.

كل جزء من E يتكون من p عنصر (حيث $0 \le p \le n$) يسمى تأليفة ل p عنصر من E.

IV. الأعداد A_n^p و $n!$ و C_n^p.

خاصيات:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$.

- عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n هو n^p.
- عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصرا, حيث $1 \le p \le n$ هو $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$.

  نرمز لهذا العدد بالرمز A_n^p. و لدينا: $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$
- عدد التبديلات ل n عنصر من بين n هو: $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$

  نرمز للجذاء $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ بالرمز $n!$, و يقرأ: "عاملي n", و اصطلاحا نضع $0! = 1$.
- عدد التأليفات ل p عنصر من بين n هو $\dfrac{A_n^p}{p!}$, و نرمز لهذا العدد بالرمز C_n^p, و لدينا $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

نتائج:

لكل n من $\mathbb{N}^*$, و لكل p من $\mathbb{N}$ بحيث $0 \le p \le n$, لدينا:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!};(p \neq 0) \qquad C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^{n-1} = n \qquad C_n^1 = n$$

مثال1 :السحب بإحلال- الترتيبات بتكرار:
يحتوي كيس على 12 كرة مرقمة من 1 إلى 12 (كل كرة تحمل رقما) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث كرات من الكيس.
(يعني نسحب كرة نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق نكرر هذه العملية ثلاث مرات متتالية).
1. ما عدد النتائج الممكن؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها قابلة للقسمة على 3؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها فردية و كلها قابلة للقسمة على 3؟

مثال2:السحب بدون إحلال- الترتيبات بدون تكرار
يحتوي صندوق على 16 بيدقة: 4 حمراء و 7 بيضاء و 5 سوداء. نسحب عشوائيا بالتتابع, و بدون إحلال, أربع بيد قات من الصندوق
(يعني نسحب بيدقة نسجل لونها و لا نعيدها إلى الصندوق, نكرر هذه العملية أربع مرات).
1. ما عدد النتائج الممكنة؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على أربع بيد قات كلها بيضاء؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على بيدقة بيضاء في السحبة الأولى فقط؟

مثال3:التبديلات
ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن كتابتهما باستعمال جميع حروف الكلمة " المغرب"

مثال4:الحب تآنيا- التأليفات
يحتوي صندوق على إحدى عشرة كرة: 4 بيضاء و 5 سوداء و كرتان زرقاوان. نسحب عشوائيا و ثانيا ثلاث كرات من الصندوق (يعني سحب ثلاث كرات في آن واحد).
1. ما عدد النتائج الممكنة؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاث كرات من نفس اللون؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على كرتين بيضاوين بالضبط؟

V. تجربة عشوائية- مصطلحات:

تجربة عشوائية: نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا.
إمكانية: كل نتيجة لتجربة عشوائية تسمى إمكانية.
كون الإمكانيات: مجموعة كل الإمكانيات لتجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات و نرمز لها بالرمز Ω, و تسمى أيضا الحدث الأكيد.
الحدث: كل مجموعة مكونة من إمكانية أو أكثر (أي كل جزء من الكون Ω) تسمى حدثا.
الحدث $A \cap B$ و الحدث $A \cup B$: الحدث $A \cap B$ هو الحدث A و B , الحدث $A \cup B$ هو الحدث A أو B.
الحدث المضاد: الحدث المضاد لحدث A هو الحدث B الذي يحقق:
$A \cap B = \phi$ و $A \cup B = \Omega$ نرمز لهذا الحدث بالرمز $\overline{A}$ و لدينا: $B = \overline{A}$.
الحدث الابتدائي: كل حدث يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدثا ابتدائيا.
مثال: رمي نرد مكعب و وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 واحدة هو تجربة عشوائية و كون الإمكانية المرتبط بهذه التجربة هو: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

VI. استقرار تردد حدث_احتمال حدث:

مثال: رمينا نردا مكعبا (وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6) 1000 مرة و حصلنا على الترددات التالية:

الرقم	1	2	3	4	5	6
تردد الرقم	0,160	0,162	0,171	0,166	0,167	0,174

- تردد رقم 4 هو $\frac{166}{1000} = 0,166$, أي أن النرد عين 166 مرة الرقم 4 خلال 1000 رمية.

لدينا: $\left(\frac{1}{6} \simeq 0,1666\cdots\right)$ تردد الرقم 4 يستقر حول العدد $\frac{1}{6}$, نقول إن احتمال الحصول على الرقم 4 هو $\frac{1}{6}$.

و نكتب: $p(\{4\}) = \frac{1}{6}$. (نلاحظ أن ترددات الأرقام الأخرى قريبة أيضا من العدد $\frac{1}{6}$).

- نعتبر الحدث A "الحصول على عدد زوجي" يعني: $A = \{2;4;6\}$, لدينا تردد الحدث A هو مجموع ترددات كل من الأرقام 2 و 4 و 6, أي: $0,162 + 0,166 + 0,174 = 0,502$ نقول إن احتمال الحدث A هو $0,502$, و نكتب $P(A) = 0,502$.

لدينا: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$ و $P(A) \simeq 0,5$, و هو ما يفسر استقرار تردد الحدث A.

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية.

عندما يستقر تردد حدث ابتدائي $\{w_i\}$ في قيمة p_i , نقول ان احتمال الحدث $\{w_i\}$ هو p_i و نكتب: $p(\{w_i\}) = p_i$.

لكل حدث $A = \{w_1;w_2;\cdots;w_k\}$ من Ω , احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تكونه: $p(A) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$.

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية,

$p(\Omega) = 1$ $\quad$ $p(\phi) = 0$ $\quad$ لكل حدث A , $0 \le p(A) \le 1$

لكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A \cap B = \phi$), $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

لكل حدث A , $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ لكل حدثين A و B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

مثال1: A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية بحيث:

$p(A) = 0,7$ و $p(B) = 0,4$ و $p(A \cap B) = 0,3$.

أحسب: $p(\overline{A})$ و $p(\overline{B})$ و $p(A \cup B)$ و $p(\overline{A} \cup B)$ و $p(\overline{A} \cap B)$ و $p(\overline{A} \cup \overline{B})$.

مثال2: في إحدى الثانويات التأهيلية, 54% من التلاميذ يمارسون كرة القدم, و 32% يمارسون كرة السلة, و 13% يمارسون كرة القدم و كرة السلة.

صادفنا أحد تلاميذ هذه الثانوية و سألناه عن الرياضة التي يمارسها. أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

A " التلميذ يمارس الرياضتين معا".

C" التلميذ يمارس إحدى الرياضتين على الأقل"

E " التلميذ لا يمارس كرة القدم و لا كرة السلة".

VII. فرضية تساوي الاحتمالات:

ليكن $\Omega = \{x_1;x_2;\cdots;x_n\}$ الكون المرتبط بتجربة عشوائية.

نفترض أن جميع الأحداث الابتدائية لها نفس الاحتمال أي: $p(\{x_1\}) = \cdots\cdots = p(\{x_n\})$

(نقول في هذه الحالة إن الاحتمال منتظم أو أن لدينا فرضية تساوي الاحتمال)

و بما أن: $p(\{x_1\}) + p(\{x_2\}) + \cdots + p(\{x_n\}) = 1$ فإن $np(\{x_1\}) = 1$, أي $np(\{x_1\}) = \frac{1}{n}$.

نعتبر الحدث $A = \{x_1;x_2;\cdots;x_p\}$ (حيث $1 \le p \le n$)

لدينا: $p(A) = p(\{x_1\}) + p(\{x_2\}) + \cdots + p(\{x_p\}) = p \times \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$

نلاحظ أن : $p(A) = \frac{CardA}{Card\,\Omega}$

عدد عناصر مجموعة منتهية E يسمى رئيسي E و نرمز له بالرمز $CardE$.

خاصية:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω , فان احتمال كل حدث A هو:

$$p(A) = \frac{A}{\Omega} = \frac{CardA}{Card\,\Omega}$$

VIII.الاحتمال الشرطي:

تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث $P(A) \ne 0$.

احتمال الحدث B , علما أن الحدث A محقق, هو العدد الذي نرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$.

و المعرف بما يلي: $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

نتائج:

ليكن Ω كون إمكانيات عشوائية.

إذا كان A و B حدثين من Ω و $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$.

فان: $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$ و $p(A\cap B)=p(B)\times p_A(B)$.

إذا كان Ω هو اتحاد حدثين غير فارغين و غير منسجمين A_1 و A_2 ,

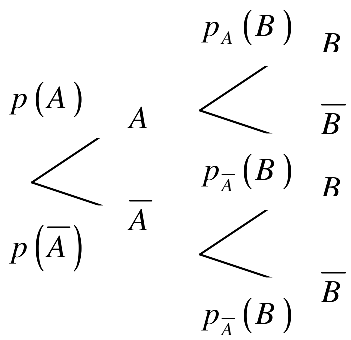
فان احتمال حدث B مرتبط بهذه التجربة هو: $p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)$

$$=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)$$

ملحوظة:

$$p(B)=p(B\cap A)+p\left(B\cap\overline{A}\right)$$

$$=p(A)\times p_A(B)+p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}(B)$$



: $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$

: $p\left(\overline{A}\cap B\right)=p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}(B)$

مثال 1:

يحتوي صندوق على كرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 4 و يحتوي كذلك على أربع كرات سوداء تحمل الأرقام 2 و 3 و 5 و 7, لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق.

أحسب احتمال الأحداث التالية:

A " الحصول على كرتين تحملان رقمين زوجين".

B"الحصول على كرتين تحملان نفس اللون".

C"الحصول على كرتين لهما نفس اللون و تحملان رقمين زوجين".

مثال 2:

توصلت المنظمة العالمية للصحة(OMS) في بحث يتعلق بنوعين من الأمراضMa وMb, في إحدى الدول إلى أن 15%مصابون بالمرض Ma , و من بين المصابين بهذا المرض 5% مصابون بالمرض Mb, و من بين غير المصابين بالمرض Ma 10% مصابون بالمرضMb.

نختار بكيفية عشوائية شخصا من هذه الدولة و نعتبر الحدثين:

A"الشخص مصاب بالمرضMa ".

B"الشخص مصاب بالمرضMb"

1. أحسب احتمال أن يكون هذا الشخص مصابا بالمرض Ma و بالمرضMb.
2. أحسب احتمال أن يكون هذا الشخص مصابا بالمرضMb.
3. علما أن هذا الشخص مصاب بالمرض,Mb ما احتمال أن يكون غير مصاب بالمرضMa ؟

استقلالية حدثين:

تعريف: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية.

نقول إن الحدثين

A و B مستقلان إذا كان: $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

خاصية: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية حيث $p(A)\neq 0$.

A و Bمستقلان إذا و فقط إذا كان: $p_A(B)=p(B)$

ملحوظة:

- ليكن A و B حدثين بحيث $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$

$$p_A(B)=p(B)\Leftrightarrow p_B(A)=p(A)$$

- A و B حدثان مستقلان يعني أن تحقيقي أحدهما لا يتأثر بتحقيق أو عدم تحقيق الآخر.

IX. استقلالية اختبارين:

مثال:

نعتبر صندوقين A و B بحيث يحتوي الصندوق A على 7 كرات: 3 بيضاء و 4 سوداء يحتوي الصندوق B على 10 كرات: 4 بيضاء و 6 سوداء.

لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نقوم بالتجربة التالية: نسحب كرة من الصندوق A و كرة من الصدوق B.

نعتبر الحدث E : "الحصول على كرة بيضاء من A و على كرة سوداء من B "

نلاحظ أن هذه التجربة مكونة من اختبارين: أحدهما هو سحب كرة الصندوق A , و الآخر هو سحب كرة من الصندوق B و أن الاحتمالات المرتبطة بأحد الاختبارين لا تتعلق بنتائج الاختبار الآخر,

نقول في هذه الحالة إن هذه التجربة مكونة من اختبارين مستقلين.

باعتبار الحدثين: E_1 " سحب كرة بيضاء من A " و E_2 " سحب كرة سوداء من B " يكون احتمال الحدث E هو جذاء احتمال الحدثين E_1 و E_2 , يعني: $p(E)=p(E_1)\times p(E_2)$.

و بما أن: $p(E_1)=\frac{3}{7}$ و أن: $p(E_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ فان: $p(E)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{35}$.

X. الاختبارات المتكررة:

نعتبر اختبارا بحيث نهتم فقط بتحقق أو عدم تحقق حدث S , ليكن p احتمال الحدث S : $p=p(S)$.

نكرر هذا الاختبار n مرة متتالية و في نفس الظروف بحيث تكون الاختبارات مستقلة فيما بينها. لدينا الخاصية التالية:

خاصية:

احتمال تحقق k مرة بالضبط الحدث S هو: $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ لكل k من $\{0;1;2;\cdots;n\}$.

تمارين:

تمرين 1: ليكن A و B حدثين مستقلين.

1. بين أن: $p(A)=p(A\cap\overline{B})+p(A)\times p(B)$
2. استنتج أن A و $\overline{B}$ مستقلان.
3. بين كذلك أن $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلان.

تمرين 2: نعتبر نردين مكعبين D_1 و D_2 .

وجوه D_1 متساوية الاحتمال, أربعة منها تحمل الرقم 1 و الأخرى تحمل الرقم 2.

وجوه D_2 مرقمة من 1 إلى 6, و احتمال ظهور الوجه رقم k هو $\frac{k}{21}$.

1) إذا رمينا النردين D_1 و D_2 معا مرة واحدة, أحسب احتمال الحدث S " النردان عينا الرقم 1"
2) رمينا النردين معا 10 مرات متتالية.
   - أ) ما احتمال تحقق الحدث S مرتين بالضبط؟
   - ب) ما احتمال تحقق الحدث S مرة واحدة على الأقل؟

XI. المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي:

مثال:

يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1 , 2, 2, 2 لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

العلاقة التي تربط كل نتيجة (أي كل عنصر من Ω) بعدد حقيقي x تسمى متغيرا عشوائيا معرفا على Ω و نرمز له بأحد الرموز X أو Y أو Z أو.....

- العلاقة Y التي تربط كل نتيجة بعدد الأرقام الزوجية التي تحملها الكرتان المسحوبتان هي متغير عشوائي.

- العلاقة X التي تربط كل نتيجة لمجموع رقمي الكرتين المسحوبتين هي متغير عشوائي.

في هذه الحالة, إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على التوالي فان: $x = 1+0 = 1$
و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 علىا التوالي فان $x = 1+2 = 3$.

القيم الممكنة للعدد الحقيقي x تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X و هي تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $X(\Omega)$ في هذا المثال

لدينا: $X(\Omega) = \{1;2;3;4\}$

ترميز:

- نرمز للحدث:"الحصول على مجموع يساوي 2" بالرمز: $(X = 2)$
- نرمز للحدث: " الحصول على مجموع أصعر من أو يساوي 3" بالرمز: $(X \leq 3)$ و هكذا....

قانون احتمال متغير عشوائي:

تعريف:

ليكن X متغيرا عشوائيا معرفا على كون إمكانيات تجربة عشوائية Ω بحيث: $X(\Omega) = \{x_1;x_2;\cdots;x_n\}$

تحديد قانون احتمال X يعني حساب احتمال جميع الأحداث $(X = x_1)$ لكل i من $\{1;2;\cdots;n\}$.

غالبا ما نلخص قانون احتمال X في الجدول:

x_i	x_1	x_2	x_3	......	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	.....	p_n

مثال:

لنحدد في المثال السابق قانون احتمال المتغير العشوائي X.

لدينا: $X(\Omega) = \{1;2;3;4\}$

- $(X = 1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة تحمل الرقم 1. إذن $p(X = 1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$.
- $(X = 2)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2 , و على كرة تحمل الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.

إذن: $p(X = 2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2}$

- $(X = 3)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة تحمل الرقم 2. إذن. $p(X = 3) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{3}{5}$
- $(X = 4)$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, إذن: $p(X = 4) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	......	4
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	.....	$\frac{3}{15}$

XII. الأمل الرياضي-المغايرة-الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

تعريف:

ليكن X متغيرا عشوائيا معرفا على كون إمكانيات تجربة عشوائية, Ω.

نضع $X(\Omega) = \{x_1;x_2;\cdots;x_n\}$ و $p_i = p(X = x_i)$ لكل i من $\{1;2;3;\cdots;n\}$.

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الذي يكتب $E(X)$ و المعرف بالعلاقة:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots x_n p_n$$

- مغايرة المتغير العشوائي X هي العدد الحقيقي الموجب الذي يكتب $V(X)$ و المعرف بالعلاقة:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 p_i=(x_1-E(X))^2 p_1+(x_2-E(X))^2 p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2 p_n$$

- الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الموجب و الذي يكتب $\sigma(X)$ و المعرف بالعلاقة:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

خاصية:

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ حيث: $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i=x_1^2 p_1+\cdots+x_n^2 p_n$

مثال:

قانون احتمال المتغير العشوائي X في المثال السابق نلخصه في الجدول:

x_i	1	2	3	......	4
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	.....	$\frac{3}{15}$

بالنسبة لهذا المتغير العشوائي,

- الأمل الرياضي هو: $E(X)=\left(1\times\frac{2}{15}\right)+\left(2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3\times\frac{6}{15}\right)+\left(4\times\frac{3}{15}\right)=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$
- المغايرة هي:

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\left(1^2\times\frac{2}{15}\right)+\left(2^2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3^2\times\frac{6}{15}\right)+\left(4^2\times\frac{3}{15}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}$$

- الانحراف الطرازي هو: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

XIII. القانون الحداني:

نعتبر تجربة عشوائية مكونة من n اختبارا بحيث هذه الاختبارات مستقلة فيما بينها,
و نتيجة كل اختبار هي تحقيق أو عدم تحقيق الحدث S (نجاح).
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث S(خلال n اختبار).

تعريف: المتغير العشوائي X يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا n و p حيث p هو احتمال الحدث Sفي اختبار واحد.

خاصية: ليكن Xمتغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا n وp , لدينا:

- قيم X هي:0 و 1 و.... وn : $X(\Omega)=\{0;1;2;\cdots;n\}$
- لكل k من $\{0;1;2;\cdots;n\}$, $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$,
- الأمل الرياضي هو: $E(X)=np$
- المغايرة هي: $V(X)=np(1-p)$

تمرين 1: ليكن X متغيرا عشوائيا قانون احتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	-1	0	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{6}$

1. أحسب احتمال الحدث $(X=2)$ أي قيمة.
2. أحسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

تمرين 2: يحتوي كيس على تسع بيد قات مرقمة من 1 إلى 9, و لا يمكن التمييز بينها باللمس.
نقوم بالتجربة التالية:نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 بيد قات من الكيس و نكون عددا من ثلاثة أرقام, رقم وحداته هو رقم البيدقة المسحوبة أولا, و رقم عشراته هو رقم البيدقة المسحوبة ثانيا و رقم مئاته هو رقم البيدقة المسحوبة ثالثا.

1) ما احتمال الحصول على عدد يتكون من ثلاثة أرقام كلها فردية؟
2) بين أن احتمال الحصول على عدد رقم وحداته زوجي هو $\frac{4}{9}$.
3) نعيد التجربة السابقة ثلاث مرات بحيث نعيد البيد قات الثلاثة إلى الكيس بعد كل تجربة.
ليكن X المتغير العشوائي: عدد المرات التي نحصل فيها على عدد رقم مئاته زوجي:
أ) حدد قانون احتمال X.
ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.