ثانوية ابن خلدون التأهيلية

عين بني مطهر

المادة: الرياضيات

مبادئ في المنطق

مستوى: السنة الأولى من سلك الباكالوريا (علوم تجريبية)

درس رقم/1

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ــ العبارات؛ العمليات على العبارات؛ الدوال العبارية؛ المكممات، ــ الاستدلالات الرياضية: الاستدلال بالخلف؛ الاستدلال بمضاد العكس؛ الاستدلال بفصل الحالات؛ الاستدلال بالتكافؤ؛ الاستدلال بالترجع.	ــ التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة؛ ــ التمكن من صياغة براهين واستدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا.	ــ ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها؛ ــ ينبغي تجنب البناء النظري والإفراط في استعمال جداول الحقيقة؛ ــ إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة بذلك بمختلف فصول المقرر اللاحقة..

نشاط1:

1. أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "x" في الخانة المناسبة .

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2}$ عدد جذري		
الإزاحة تحافظ على المسافات		
الدالة $x \to x^2$ حيث $x \in \mathbb{R}$		
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		

2. هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد

نشاط2:

نعتبر النصوص الرياضية التالية :

(1 «6عدد يقبل القسمة على 2 و 3 » A

(2 « 5 - عدد موجب » B

(3 « 114516مضاعف للعدد 4 » C

(4 «الإزاحة تحافظ على المسافة بين نقطتين » D

(5 «جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة » E

(6 «مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي » F

(7 «$\left((-2)^2 = -4\right)$» G

(8 «$\left(\sqrt{7} \succ 3\right)$» H

I. العبارات و العمليات على العبارات

1.1. العبارات

نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة :

الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة

و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

p
1
0

جدول حقيقة عبارة

1.2. العمليات على العبارات

1.2.1. نفي عبارة

نعتبر العبارة : " 3 عدد زوجي " p

ما قيمة حقيقة العبارة p

حدد نفي العبارة p نرمز لها ب $\overline{p}$

ما قيمة حقيقة العبارة $\overline{p}$

إذن نفي عبارة p هو كل عبارة تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ أو $\neg p$

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

جدول حقيقة نفي عبارة

1.2.2. عطف عبارتين

عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ و $q)$ والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا.

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

جدول حقيقة العطف المنطقي

أمثلة:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$\left((-2)^2 = 4\right)$ و $\left(\sqrt{3} \geq 1\right)$

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2} \succ 3\right)$ و $\sqrt{2} \in Q$

1.2.3. فصل عبارتين

فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ أو $q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا.

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

جدول حقيقة الفصل المنطقي

أمثلة:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ أو $\left((-2)^2=4\right)$

$\frac{1}{2}\in\mathbb{N}$ أو $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\prec 3\right)$

1.2.4. استلزام عبارتين

استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط ادا كانت p صحيحة و q خاطئة

ملاحظات

- ❖ العبارة : $(p \Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " ادا كانت p فان q "
- ❖ العبارة : $(q \Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p \Rightarrow q)$
- ❖ للبرهان أن العبارة : $(p \Rightarrow q)$ صحيحة , نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

أمثلة:

حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$\left(\sqrt{3}\geq 1\right) \Rightarrow \left((-2)^2=-4\right)$

$-1\in\mathbb{N} \Rightarrow \left(\sqrt{5}\prec 3\right)$

p	q	q و p
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

جدول حقيقة الاستلزام المنطقي

1.2.5. تكافؤ عبارتين

تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا.

العبارة : $(p \Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q " أو " p إذا وفقط إذا كان q "

أمثلة:

حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$\left(\sqrt{3}\geq 1\right) \Leftrightarrow \left((-2)^2=4\right)$

$-1\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\geq 3\right)$

p	q	q و p
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية :

العبارتان $(p \Leftrightarrow q)$ و $\left[(p\Rightarrow q) \text{ و } (q\Rightarrow p)\right]$ متكافئتان

نشاط1:

نعتبر التعبير التالي : $(x\in\mathbb{R});x^2-x\geq 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=2$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=\frac{1}{2}$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=-1$

إذن التعبير: $(x\in R);x^2-x\geq 0$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نشاط2:

نعتبر التعبير التالي : $(n\in\mathbb{N});n^2\geq 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n=2$

- هل توجد قيم لـ : n لا تحقق التعبير السابق؟

الدالة العبارية و المكممات

1.3. الدالة العبارية

نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز أو $B(x)$ أو $A(x;y)$ ....

1.4. العبارات المكممة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x\in E , A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$"

وتكون العبارة " $\exists x\in E , A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x\in E , A(x)$ " ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$"

وتكون العبارة " $\forall x\in E , A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

<u>خاصية :</u>

- نفي العبارة " $\forall x\in E , A(x)$ " هو العبارة " $\forall x\in E , \overline{A(x)}$ "
- نفي العبارة " $\exists x\in E , A(x)$ " هو العبارة " $\exists x\in E , \overline{A(x)}$ "

<u>أمثلة:</u> حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $(\forall x \in R);-1\le \cos x \le 1$
2. $(\forall x\in R); x^2 \succ 0$
3. $(\forall n\in N);2^n \succ 5(n+1)$

<u>أمثلة:</u> حدد نفي كل عبارة من العبارات الآتية:

1. " $\exists x \in \mathbb{R} , x^2-2=0$ "
2. $(\forall x\in R); x^2 \succ 0$

II. الاستدلالات الرياضية

1.5. الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

لكي نبرهن أن الاستلزام $(p \Rightarrow q)$ صحيح يكفي أن نبرهن أن الاستلزام المضاد للعكس $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ صحيح

<u>مثال:</u> ليكن $x\in R$ و $y\in R$ بين أن:

$$x+y \succ 1 \Rightarrow \left(x \succ \frac{1}{2} \text{ أو } y \succ \frac{1}{2}\right)$$

1.6. الاستدلال بالتكافؤ

يعتمد الاستدلال بالتكافؤ على القانون المنطقي التالي :

إذا كان : $(p \Leftrightarrow q)$ و $(q \Leftrightarrow r)$ فان : $(p \Leftrightarrow r)$

<u>مثال:</u> بين أن : $\forall (a;b)\in (\mathbb{R}^{*+})^2 \quad a+b\ge 2\sqrt{ab}$

1.7. الاستدلال بفصل الحالات

يعتمد الاستدلال بفصل الحالات على القانون المنطقي التالي :

$$\left[(p \text{ أو } r)\Rightarrow q\right] \Leftrightarrow \left[(p\Rightarrow q) \text{ و } (r\Rightarrow q)\right]$$

<u>مثال:</u> باستعمال الاستدلال بفصل الحالات .

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):|3x-6|=1$

1.8. الاستدلال بالخلف

يعتمد الاستدلال بالخلف على القانون المنطقي التالي : $\left[\overline{p} \Rightarrow q \text{ و} \overline{q}\right] \Rightarrow p$

مثال: لتكن f دالة تزايدية قطعا على مجال I , و a و b عنصرين من I بحيث: $f(a)=b$ و $f(b)=a$
بين أن : $a=b$ (يمكنك استعمال الاستدلال بالخلف)

1.9.الاستدلال بالترجع

لتكن $p(n)$ عبارة مرتبطة فقط بعدد صحيح طبيعي n

إذا كانت :

- $p(n)$ عبارة صحيحة من أجل عدد صحيح طبيعي معلوم n_0
- العبارة $\left(p(n) \Rightarrow p(n+1)\right)$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq n_0$

فان : $p(n)$ عبارة صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq n_0$

مثال:
بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in N^* : 1+2+3+.........+n = \frac{n(n+1)}{2}$$