ثانوية ابن خلدون التأهيلية

عين بني مطهر

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس المعادلات التفاضلية

درس رقم/10

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى السنة الثانية باك شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

1. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$:

تعريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين.

المعادلة $y' = ay + b$, حيث المجهول هو دالة عددية y و y' مشتقتها, تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية $f'(x) = af(x) + b$, لكل x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$.

ملحوظة:

حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ يعني تحديد الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق هذه المعادلة.

خاصية 1:

ليكن a عددا حقيقيا.

حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

مثال:

حلول المعادلة التفاضلية: $y' = 4y$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{4x}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

خاصية 2:

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين.

حلول المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

حالة خاصة: حلول المعادلة التفاضلية $y' = b$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto bx + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

خاصية 3:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث a غير منعدم.

لكل عددين حقيقيين x_0 و y_0 من $\mathbb{R}$, المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل حلا وحيدا f يحقق الشرط $f(x_0) = y_0$.

البرهان:

ليكن f حلا للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$.

لدينا حسب الخاصية 2 : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$$

$$\Leftrightarrow ke^{ax_0} = y_0 + \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow k = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{-ax_0}$$

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد k بحيث $f(x_0)=y_0$.

إذن الدالة الوحيدة f حل المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ و التي تحقق الشرط $f(x_0)=y_0$

هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f:x\mapsto\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)e^{-ax_0}\times e^{ax_0}-\dfrac{b}{a}$

أي: $f:x\mapsto\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\dfrac{b}{a}$.

2. المعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=0$:

تعريف 1:

ليكن a و b عددين حقيقيين.

المعادلة $y''+ay'+by=0$ حيث المجهول هو دالة عددية y , بحيث y' هي مشتقتها الأولى و y'' هي مشتقتها الثانية, تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية: $(\forall x\in\mathbb{R});f''(x)+af'(x)+bf(x)=0$

تسمى حلا للمعادلة التفاضلية: $y''+ay'+by=0$.

ملحوظة:

حل المعادلة التفاضلية: $y''+ay'+by=0$ (E), يعني تحديد جميع الدوال العددية القابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و التي تحقق هذه المعادلة.

تعريف 2:

ليكن a و b عددين حقيقيين.

المعادلة $r^2+ar+b=0$ حيث r هو المجهول تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=0$.

خاصية:

لتكن المعادلة التفاضلية: $y''+ay'+by=0$ (E) و معادلتها المميزة $r^2+ar+b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان.

- إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 , فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- إذا كانت للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج r_0 , فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto(\alpha+\beta)e^{r_0x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- اذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$, فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto e^{px}(\alpha\cos qx+\beta\sin qx)$ حيث α و β عددان حقيقيان.

لاحظ المعاملات

$y''+ay'+b=0$

$r^2+ar+b=0$

مثال:

لنحل المعادلة التفاضلية: $(E):y''-7y'+12=0$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي: $r^2-7r+12=0$

لدينا: $\Delta=1$, إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: $r_1=3$ و $r_2=4$

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

يمكن كتابة $\alpha\cos qx+\beta\sin qx$ على شكل $A\cos(qx+\beta)$ حيث $(A;B)\in\mathbb{R}^2$.

ملحوظة: حالة خاصة:

المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ التي تمت دراستها في السنة الأولى من سلك الباكالوريا هي حالة خاصة للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=0$, و حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

مثلا حلول المعادلة التفاضلية $y''+4y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$x\mapsto\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

مثال1:

حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية: $(E): 3y' + y = 0$

و التي تحقق الشرط $f(0) = -\frac{1}{3}$

مثال2:

لتكن المعادلة التفاضلية: $(E): \frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0$

حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث منحنى الدالة f يقبل النقطة التي أفصولها 1 مماسا معامله الموجه 2.

مثال3:

لتكن y دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق المعادلة التفاضلية $(E): y'' + 5y' = 6$.

بوضع $y' = Y$, حل المعادلة (E).

حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$.

مثال4:

حل المعادلات التفاضلية:

$(E): y'' - 5y' + 6y = 0$ $(F): y'' + 2y' + y = 0$ $(G): y'' + 4y' + 8y = 0$

مثال5:

حل المعادلة التفاضلية $(E): y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$.

حدد الحل f للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطين $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$.

مثال6:

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم.

حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$(E_1): y'' - \omega^2 y = 0$ $(E_2): y'' + \omega y' = 0$