ثانوية ابن خلدون التأهيلية

عين بني مطهر

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس الحساب التكاملي

درس رقم/9

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى:السنة الثانية من سلك الباكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

تكامل دالة متصلة على قطعة

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال $[a;b]$ لدينا:

$(\forall x\in[a;b]);G(x)=F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي. و لدينا: $G(b)-G(a)=(F(a)+c)=F(b)-F(a)$

إذن العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F

1. تعريف:

لتكن f دالة متصلة على كمجال $[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a;b]$.

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ و يقرأ تكامل من a الى b ل $f(x)dx$

ترميز: العدد $\int_a^b f(x)dx$ يكتب أيضا $\left[F(x)\right]_a^b$ و لدينا: $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$ ..

ملحوظة:

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير أخر.

إذن: .... $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds=$

أمثلة:

$$I=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=(1+3)-(0)=4 \qquad J=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt=[\ln t]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}$$

2. نتائج:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ بحيث الدالة f' متصلة على المجال $[a;b]$

لدينا: $\int_a^b f'(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

لكل عدد حقيقي k لدينا: $\int_a^b kdx=[kx]_a^b=k(b-a)$

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a;b]$ لدينا: $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^a f(x)dx=0$

3. علاقة شال-خطا نية التكامل

خاصية:

لتكن f و g دالتين معرفتين و متصلتين على مجال I و a و b و c عناصر من I و k عددا حقيقيا

علاقة شال: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

الخطانية: $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b (kf)(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ $I=\int_1^3 |x-2|dx$

مثال1:

لنحسب التكامل $I=\int_1^3 |x-2|dx$

لدينا: $x\geq 2 \Leftrightarrow x-2\geq 0$ و منه: $I=\int_1^2 |x-2|dx+\int_2^3 |x-2|dx=\int_1^2 (2-x)dx+\int_2^3 (x-2)dx$

$$I=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}+2\right)=1$$

مثال2: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$ $\qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

التكامل و الترتيب

1.خاصية:

لتكن f و g دالتين متصلتين على المجال I و a و b عنصرين من هذا المجال.

- إذا كان $a\leq b$ و f موجبة على القطعة $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx\geq 0$
- إذا كان $a\leq b$ و $(\forall x\in[a;b]);f(x)\leq g(x)$ فان; $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

مثال 1: لدينا الدالة $\ln$ متصلة و موجبة على القطعة $[1;e]$ و $1\leq e$ إذن: $\int_1^e \ln xdx\geq 0$

مثال 2: لنبين أن : $\frac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dt\leq 1$

ليكن t عنصرا من $[0;1]$ لدينا $0\leq t^2\leq 1$ و منه : $-1\leq -t^2\leq 0$

بما أن الدالة $x\mapsto e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فان $e^{-1}\leq e^{-x^2}\leq 1$

و بما أن الدالة $t\mapsto e^{-x^2}$ متصلة على المجال $[0;1]$ و $0\prec 1$ فان: $\int_0^1 e^{-1}dt\leq\int_0^1 e^{-t^2}dt\leq\int_0^1 1dt$

إذن: $\frac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dt\leq 1$

2.القيمة المتوسطة

خاصية و تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I بحيث $a\prec b$.

يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a;b]$ بحيث: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ -

العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$

بعض تقنيات حساب التكامل

1. استعمال الدوال الأصلية

هذه التقنية تعتمد أساسا على الدوال الأصلية الاعتيادية

أمثلة:

$$I=\int_0^{\ln 2} e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{\ln 4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$J=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_1^e \ln' x\ln^2 xdx=\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e=\frac{1}{3}$$

2. المكاملة بالأجزاء:

خاصية: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث الدالتان u' و v' متصلتان على المجال $[a;b]$

لدينا : $\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$

هذه الصيغة تسمى صيغة المكاملة بالأجزاء

مثال1: لنحسب $I=\int_0^{\pi} x\sin x dx$

نضع $u'(x)=\sin x$ و $v(x)=x$, و منه $u(x)=-\cos x$ و $v'(x)=1$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0;\pi]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[0;\pi]$

ومنه: $I=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x dx=[-x\cos x]_0^{\pi}-[-\sin x]_0^{\pi}=\pi$

مثال2: بين أن : $\int_0^1\left(e^x-e^{x^2}\right)dx\geq 0$

1. بين أن : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\cos t}dt\prec 0$

2. بين أن : $\frac{1}{2}\ln 2\leq\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{x}dx\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$

مثال3: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

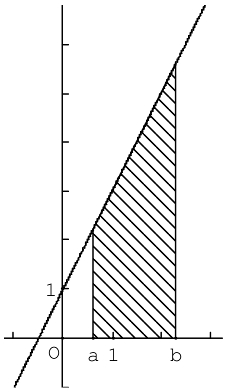
حدد القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;1]$

حساب المساحات:

في كل ما يلي المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$

وحدة قياس المساحات و التي نرمز لها بالرمز $u.a$ هي مساحة المستطيل $OIKJ$ J

يعني أن: $u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$



خاصية 1:

لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$

لتكن A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي $x=a$ و $x=b$

إذا كانت f موجبة على القطعة $[a;b]$ فان : $A=\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات (الشكل 1)

إذا كانت f سالبة على القطعة $[a;b]$ فان: $A=-\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات (الشكل 2)

خاصية 2:

لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي

$x=a$ و $x=b$ هي العدد الحقيقي الموجب $A=\int_a^b|f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحات.

مثال: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=1cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2-2x$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=3$

خاصية 3:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$, و (C_f) و (C_g) المنحنيين الممثلين لهما على التوالي في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=a$ و $x=b$ هي العدد:

$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ بوحدة قياس المساحات

حساب الحجوم:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ وحدة قياس الحجوم هي: $u.v=\left\|\vec{i}\right\|\left\|\vec{j}\right\|\left\|\vec{k}\right\|$

خاصية1:

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ اللذين معادلتهما على التوالي: $z=a$ و $z=b$ $\left(a\prec b\right)$ و لتكن $S\left(t\right)$ مساحة تقاطع المجسم S مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\leq t\leq b$

إذا كانت الدالة المعرفة على المجال $\left[a;b\right]$ بما يلي: $t\mapsto S\left(t\right)$ متصلة على المجال $\left[a;b\right]$ فان حجم V المجسم S هو $V=\int_a^b S\left(t\right)dt$ بوحدة قياس الحجوم.

خاصية2:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

لتكن f دالة متصلة على $\left[a;b\right]$ $\left(a\prec b\right)$

حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f جول محور الأفاصيل هو: $V=\int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx$ بوحدة قياس الحجوم.

مثال1: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ مع $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$ نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f\left(x\right)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين الدالة f و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $y=x-1$ و $x=\dfrac{1}{e}$ و $x=e$

مثال2: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ بحيث $\left\|\vec{i}\right\|=3cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=2cm$

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي:

$$f\left(x\right)=\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x} \quad و \quad g\left(x\right)=e^{-x}$$

أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيي الدالتين f و g و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي: $x=0$ و $x=\ln 2$ (إنشاء المنحنيين غير مطلوب)

مثال3: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$$

ليكن $\left(C\right)$ منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران $\left(C\right)$ حول محور الأفاصيل على المجال $\left[0;1\right]$