ثانوية ابن خلدون التأهيلية

عين بني مطهر

المادة: الرياضيات

درس رقم /12

الأستاذ: نجيب عثماني

ملخص لدرس الهندسة الفضائية

درس الجداء السلمي

مستوى السنة الثانية باك شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

I. الجداء السلمي في الفضاء و خاصياته:

1. تعريف:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ يوجد على الأقل مستوى (P) يمر من النقط A و B و C.

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ في المستوى (P), و نرمز له بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

ملحوظة:

جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمدد إلى الفضاء.

نتائج:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, و A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان: $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos BAC$
- إذا كانت $\vec{u}$ غير منعدمة فان. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$, حيث H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

ملحوظة:

- الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ يرمز له بالرمز $\vec{u}^2$, و يسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$
- منظم المتجهة $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي الموجب: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا, لدينا:

← **التماثلية:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

← **الخطانية:** $\left\{\begin{array}{l}(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})\\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{array}\right.$

2. تعامد متجهتين

تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء. نقول إن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, و نكتب: $\vec{u}\perp\vec{v}$

مثال1:

$ABCDEFGH$ مكعب

لدينا: $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان أي $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ (لأن (AE) عمودي على المستوى (ABC))

و بما أن $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$ فان $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ أي $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BF}$

مثال2:

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا طول ضلعه a

أحسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}$

II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

المعلم و الأساس المتعامدان الممنظمان:

تعريف:

ليكن $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساسا في الفضاء و O من الفضاء

نقول إن $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان: $\vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{k}=0$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$

نقول إن $(\vec{o};\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساسا متعامدا ممنظما

فيما تبقي من فقرات الدرس, ننسب الفضاء إلى معلم متعامد ممنظم .

الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

خاصية:

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء فان: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

نتيجة:

تكون المتجهات $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $xx'+yy'+zz'=0$

الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

منظم متجهة

خاصية

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ فان منظم المتجهة $\vec{u}$ هو: $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

المسافة بين نقطتين:

خاصية:

لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء

المسافة بين النقطتين A و B هي: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$

خاصية:

لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ هي مستوى معادلته تكتب على شكل $ax+by+cz+d=0$, حيث d عدد حقيقي

مثال:

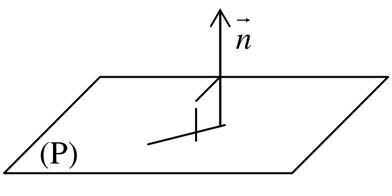
نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المتجهة $\vec{u}(2;1;-1)$ لنحدد (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء, لدينا: $M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)+(y+1)-(z-2)=-1$$

$$\Leftrightarrow 2x+y-z+2=0\ .$$

إذن المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته: $2x+y-z+2=0$



III. المستوى المحدد بنقطة و متجهة منظمية عليه:

متجهة منظميه على مستوى:

تعريف:

ليكن (P) مستوى في الفضاء.

نسمي متجهة منظميه على المستوى (P) كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة يكون اتجاهها عموديا على المستوى (P).

نتيجة:

المتجهة $\vec{n}$ منظميه على المستوى (P) إذا وفقط إذا كانت $\vec{n}$ متعامدة مع متجهتين للمستوى (P) .

خاصية:

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية بحيث $(a;b;c) \neq (0;0;0)$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $ax+by+cz+d=0$

هي مستوى و المتجهة $\vec{n}(a;b;c)$ متجهة منظميه عليه.

معادلة ديكارتية لمستوى محدد بنقطة و متجهة منظميه عليه:

خاصية:

لتكن $\vec{n}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء.

المستوى (P) المار من النقطة A و متجهة منظميه عليه, هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

و معادلة ديكارتية له تكتب على شكل: $ax+by+cz+d=0$, حيث d عدد حقيقي.

مسافة نقطة عن مستوى:

تعريف:

ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء و H المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P).

المسافة AH تسمى مسافة النقطة A عن المستوى (P), و يرمز لها بالرمز $d(A;(P))$.

خاصية:

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي: $d(A;(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال1:

أعط متجهة منظميه على المستوى (P) في كل حالة من الحالات التالية:

$(P): x-2y+7z-3=0$

$(P): x+y+4=0$

$(P): 2y-z+11=0$

مثال2:

نعتبر في الفضاء المتجهة $\vec{n}(1;2;1)$ و النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(3;1;0)$.

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A و $\vec{n}$ متجهة منظميه عليه.

حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة B و العمودي على المستوى (P) .

حدد مثلوث إحداثيات النقطة B' المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P) .

IV. دراسة تحليلية للفلكة:

تعريف:

لتكن Ω نقطة من الفضاء و R عددا حقيقيا موجبا قطعا.

الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\Omega M=R$.

نرمز لهذه الفلكة بالرمز $S(\Omega;R)$

معادلة ديكارتية الفلكة محددة بمركزها و شعاعها:

خاصية:

معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها R $(R\succ 0)$ هي: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

و تكتب أيضا: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ حيث: $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

قطر فلكة:

كل مستقيم (D) من الفضاء مار من مركز فلكة $S(\Omega;R)$ يقطعها في نقطتين A و B , حيث Ω منتصف $[AB]$

القطعة $[AB]$ تسمى قطرا للفلكة $S(\Omega;R)$.

خاصية:

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$, و معادلة ديكارتية لها

هي: $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$, حيث $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$.

V. دراسة مجموعة النقط بحيث:

خاصية:

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية بحيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ و S مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

تكون (S) فلكة إذا وفقط إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d\succ 0$

مركز هذه الفلكة هو النقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ و شعاعها هو: $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

إذا كان $a^2+b^2+c^2-4d\prec 0$ فان (S) هي المجموعة الفارغة.

إذا كان $a^2+b^2+c^2-4d=0$ فان (S) هي $(S)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)\right\}$

تمرين:

حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) في الحالات التالية:

(S) مركزها $\Omega(1;2;-3)$ و شعاعها $R=4$.

(S) مركزها $\Omega(0;-1;1)$ و تمر من النقطة $A(1;2;-1)$

(S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$,

حيث: $A(1;-1;2)$ و $B(-1;3;-4)$.

تمرين:

حدد مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلات التالية:

$$(E_1): x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+6=0$$

$$(E_2): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+6=0$$

$$(E_3): x^2+y^2+z^2-x+3y+2z+\frac{9}{2}=0$$

VI. تقاطع فلكة و مستقيم:

ليكن (D) مستقيما من الفضاء معرفا بتمثيل بارامتري, و (S) فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية, لندرس ثلاث أمثلة نستنتج من خلالها الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S).

مثال 1:

لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0$ و (D) المستقيم المعرف بما يلي:

$$\begin{cases} x=2t \\ y=5+t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) نقطة وحيدة مشتركة هي A, نقول إن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في النقطة A .

مثال 2:

لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$ و (D) المستقيم المعرف بما يلي:

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-2k;(k\in\mathbb{R}) \\ z=-1+k \end{cases}$$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) نقطتان مشتركتان هما A و B, نقول إن المستقيم (D) قاطع للفلكة (S).

مثال 3:

لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0$ و (D) المستقيم المعرف بما يلي:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

في هذا المثال نقول إن المستقيم (D) يوجد خارج الفلكة (S).

VII. تقاطع فلكة و مستوى:

لتكن (S) فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية, و (P) مستوى من الفضاء معرفا بمعادلة ديكارتية, لندرس ثلاث أمثلة نستنتج من خلالها الوضع النسبي للمستوى (P) و الفلكة (S).

مثال 1:

لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ والمستوى (P) المعرف بالمعادلة: $2x+y+2z-3=0$

مثال 2:

لندرس تقاطع الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(2;0;1)$ شعاعها $R=3$ مع المستوى (P) الذي معادلته $x-2y+z+3=0$

مثال 3:

لتكن (S) الفلكة التي معادلتها هي: $x^2+y^2+z^2-2x+1=0$, و المستوى (P) الذي معادلته الديكارتية هي: $x+y-z+1=0$ لندرس تقاطع الفلكة (S) و المستوى (P).

خاصية:

يكون مستوى (P) مماسا للفلكة $S(\Omega;R)$ إذا وفقط إذا كان $d(\Omega;(P))=R$.

معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة:

خاصية:

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و A نقطة من الفلكة (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس للفلكة (S) عند النقطة A, و هو المستوى العمودي على المستقيم $(A\Omega)$ في النقطة A , أي $M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$.