المـــــــادة :	الرياضيات	المعامل :	7
الشعـــب(ة):	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	مدة الإنجاز :	3 س

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية غير القابلة للبرمجة ؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛
- عدد الصفحات : 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان في الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة.

معلومات خاصة

- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها وتتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

- بالنسبة للتمرين الخامس، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول : (3 ن)	
نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(0,-2,0)$ و $B(1,1,-4)$ و $C(0,1,-4)$ والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$	
1) بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,2,3)$ وأن شعاعها هو 5.	0,5
2) أبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ واستنتج أن $4y+3z+8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).	1
ب - أحسب $d(\Omega,(ABC))$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).	0,5
3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC).	
أ - بين أن : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1\\y=2+4t\\z=3+3t\end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).	0,5
ب - بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(1,-2,0)$.	0,25
ج - تحقق من أن H هي نقطة تماس المستوى (ABC) والفلكة (S).	0,25
التمرين الثاني : (3 ن)	
1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$	1
2) نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C التي الحاقها على التوالي هي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2(4\sqrt{3}+4i)$. ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{4\pi}{3}$.	
أ - بين أن : $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$	0,5
ب - تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R.	0,25
ج - بين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم أكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي.	0,75
د - استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.	0,5
التمرين الثالث : (3 ن)	
يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد : 1 و 1 و 1 و 2 و 2 و 2 و 3 و 3 (لا يمكن التمييز بينها باللمس). نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق.	
1) ليكن A الحدث : «الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 ». و B الحدث : «الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3» بين أن : $P(A)=\frac{3}{28}$ و $P(B)=\frac{13}{28}$.	1,25
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا.	
أ - حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .	0,25
ب - بين أن : $P(X=1)=\frac{15}{28}$	0,75
ج - اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.	0,75

التمرين الرابع : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين أن : $u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$. 0,5

2) بين أن : $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$. 0,75

3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية وأنها متقاربة. 0,5

4) أ – بين بالترجع أن : $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$. 0,75

ب – حدد نهاية المتتالية (u_n). 0,5

التمرين الخامس : (8 ن)

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

1) أ – تحقق من أن $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$ لكل x من $]0,+\infty[$. 0,25

ب – بين أن : $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$. 0,5

2) أ – تحقق من أن $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$. 0,25

ب – استنتج أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$. 0,5

3) أ – بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ وأنها تزايدية على $[1,+\infty[$. 0,5

ب – استنتج أن : $g(x) > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$. (لاحظ أن $g(1) > 0$) 0,5

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,1]$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ نأخذ : $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$

1) بين أن : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$، ثم استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$. 1

2) أ – بين أن : $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا. 0,5

ب – بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$ ثم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (نذكر أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$). 0,75

ج – بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$. 0,5

3) بين أن $y = 3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$. 0,5

4) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها). 0,75

5) أ – باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \dfrac{2}{e}$ (ضع : $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ و $v(x) = \ln x$) 1

ب – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$ هي $1 - \dfrac{1}{e}\ cm^2$. 0,5