مجموعات الأعداد : IN ، Z ، ID ، Q ، IR

1. مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية:

نرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية : $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ....\ 100\ ;\ 101.....$ بالرمز IN ونكتب:

$$IN = \{\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ....\ ;\ 100\ ;\ 101\ ;\ ....\ \}$$

المجموعة IN مجموعة غير منتهية لأنه إذا كان عدد $\mathbf{n}$ ينتمي الى IN ، فإن العدد الموالي له وهو $\mathbf{n+1}$ ينتمي كذلك الى IN .

2. مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية:

نرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة النسبية : بالرمز Z وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد الصحية وعلى مقابلاتها :

$$\mathbf{Z} = \{\ ....\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;.......\ \}$$

المجموعة $\mathbf{Z}$ تتضمن المجموعة IN ونكتب : $IN \subset \mathbf{Z}$.

3. مجموعة الأعداد العشرية النسبية:

نرمز لمجموعة الأعداد العشرية النسبية : بالرمز ID وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد مثل :

$12,758\ ;\ -6,23475\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ -17$ أي أنها تحتوي من جهة على جميع الأعداد الموجودة في المجموعة $\mathbf{Z}$

ومن جهة أخرى على أعداد مثل $12,758\ ;\ -6,23475$ سنحاول أن نجد تعريفا واضحا للأعداد العشرية النسبية.

يمكن أن العددين الأخيرين على الشكل التالي: $12,758 = \frac{12758}{10^4}\ ;\ -6,23475 = -\frac{62223475}{10^5}$ يمكن أن نعمم هذه النتيجة

ونقدم تعريفا لمجموعة الأعداد العشرية النسبية كالتالي :

$$\mathbf{ID} = \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{10^n}} / \mathbf{a} \in \mathbf{Z}, \mathbf{n} \in \mathbf{IN} \right\}$$

نلاحظ أنه إذا كان $\mathbf{n = 0}$ فإن $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{10^n}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{10^0}} = \mathbf{a} \in \mathbf{Z}$ ، وهكذا نستنتج أن: $IN \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{ID}$

4. مجموعة الأعداد الجدرية:

نرمز لمجموعة الأعداد الجدرية : بالرمز Q وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد الكسرية الموجبة والسالبة.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} / \mathbf{a} \in \mathbf{Z}, \mathbf{b} \in \mathbf{IN^*} \right\}$$

نلاحظ أنه إذا كان $\mathbf{b = 10^n}$ ، فإن $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{10^n}} \in \mathbf{ID}$ ، وهكذا نستنتج أن: $IN \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{ID} \subset \mathbf{Q}$

من جهة أخرى لو حاولنا مثلا كتابة عدد كسري مثل $\frac{17}{3}$ كتابة عشرية سنجد باستعمال تقنية القسمة المعروفة مايلي :

$\frac{17}{3} = ...$ ، إنه لا يريد أن ينتهي ، سيسافر العدد ... إلى ما لا نهاية على ما يبدو. إن نسبة العددين العشريين 17 و 3 ليس عددا عشريا.

عكسيا لو اعتبرنا الكتابة : $\mathbf{x = 5,6666....6.....}$ نجد لو ضربنا الشطرين في 10 :

$\begin{cases} \mathbf{x = 5,6666....6.....} \\ \mathbf{10x = 56,666....6.....} \end{cases}$ وبالفرق نجد : $\mathbf{9x = 51}$ وبالتالي يكون : $\mathbf{x} = \frac{51}{9} = \frac{3\times17}{3\times17} = \frac{17}{3}$ وهو العدد نفسه الذي كان في البداية . نستنتج ما يلي :

> كل عدد جدري يكتب "كتابة عشرية" لانهائية ودورية ودوره هو العدد الذي يتكرر الى ما لا نهاية.
>
> في المثال السابق للعدد $\frac{17}{3}$ ، الدور هو العدد 6.

4. مجموعة الأعداد الحقيقية:

طرح موضوع الأعداد اللاجدرية تقريبا 5 قرون قبل الميلاد من طرف أحد مريدي المدرسة الفيتاغورية باليونان عندما طلب معرفة طول وتر مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين كما في الشكل (x طول الوتر)

واختصرت المسألة في العادلة $x^2 = 2$

وحل هذه المعادلة كما هو معروف هو العدد $\sqrt{2}$ الذي لا نعرف عنه إلا أنه عدد موجب ويحقق: $(\sqrt{2})^2 = 2$

لقد تعرفنا خلال السنوات الفارطة على أعداد أخرى مثل $\sqrt{5}\ ;\ -\frac{\sqrt{7}}{3}\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{3}$ وهي الأعداد اللاجدرية وقلنا أنها لا تنتمي إلى $\mathbf{Q}$ ، لنحاول أن نبين مثلا أن $\sqrt{2}$ لا تنتمي إلى $\mathbf{Q}$.

إن ذلك يتطلب أن نقبل الخاصية التالية في الحسا بيات وهي : " إذا كان p عددا أوليا يقسم عددا على شكل a^2 فإن p يقسم a ".

برهان بالخلف:

نفترض أن $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ ، أي أنه يوجد عددان a و b أوليان فيما بينهما بحيث : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ وبالتالي : $a^2 = 2b^2$

نستنتج أن 2 يقسم a^2 وحسب الخاصية المقبولة فإن : 2 يقسم **a** (1)

إذن يمكن كتابة a على الشكل $a = 2k$ حيث k عدد صحيح . لنعوض a بصغتها الأخيرة في العلاقة $a^2 = 2b^2$ سنجد:

$b^2 = 2k^2$ بنفس الطريقة نثبت أن : 2 يقسم **b** (2)

من (1) و (2) نستنتج أن 2 قاسم مشترك للعددين a و b وهذا يتناقض مع كون العددين a و b أوليان فيما بينها . وبالتالي فأن الإفتراض $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ كان خاطئا . وهكذا نفهم أن هناك أعداد غير الأعداد الجدرية وهي الأ'داد اللاجدرية مثل

$$\sqrt{3}\ ;\ \pi\ ;\ -\frac{\sqrt{7}}{3}\ ;\ \sqrt{2}$$

نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية : بالرمز IR وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد الجدرية والأعداد اللاجدرية.

ولدينا : $\mathrm{IN} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{ID} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{IR}$