1 - حلول المعادلة $y'' + n^2y = 0$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي : $r^2 + n^2 = 0$

وحلا هذه المعادلة هما : $r_1 = in$ و $r_2 = -in$

إذن حلول المعادلة التفاضلية $y'' + n^2y = 0$ هي الدوال :

$$x \longmapsto a\cos(nx) + b\sin(nx)$$

حيث $(a,b) \in IR^2$.

2 - أ- لنبين أن الدالة $U : x \longrightarrow \sin^n(x)$ حل للمعادلة (I)

لدينا لكل x من IR :

$$U'(x) = n\cos x \sin^{n-1}(x)$$

$$U''(x) = n(-\sin x.\sin^{n-1}(x) + \cos x.(n-1)\cos x \sin^{n-2}(x))$$

$$= n(-\sin^n(x) + (n-1)\cos^2 x \sin^{(n-2)}(x))$$

$$= n(-\sin^n(x) + (n-1)(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}(x))$$

$$= n(-\sin^n(x) + (n-1)\sin^{n-2}(x) - (n-1)\sin^n(x))$$

$$= n(-n\sin^n(x) + (n-1)\sin^{(n-2)}(x))$$

إذن لكل x من IR لدينا :

$$U''(x) + n^2U(x) = n(-n\sin^n(x) + (n-1)\sin^{n-2}(x)) + n^2\sin^n(x)$$

$$= -n^2\sin^n(x) + n(n-1)\sin^{n-2}(x) + n^2\sin^n(x)$$

$$= n(n-1)\sin^{n-2}(x)$$

وهذا يعني أن الدالة U هي بالفعل حل للمعادلة (I)

ب- تحديد الحل y الذي يحقق $y(0) = 1$ و $y'(0) = -n$

من نتيجتي السؤالين 1 - و 2- أ- نستنتج أن حلول المعادلة (I) هي الدوال y المعرفة على IR بمايلي :

$$y(x) = a\cos(nx) + b\sin(nx) + \sin^n(x)$$

حيث $(a,b) \in IR^2$.

وإذا كان $y(0) = 1$ و $y'(0) = -n$

فإن $a\cos 0 + b\sin 0 + \sin^n(0) = 1$

و $-na\sin 0 + nb\cos 0 + n\cos 0 \sin^{n-1} 0 = -n$

أي $a = 1$ و $nb = -n$

أي $a = 1$ و $b = -1$

إذن حل المعادلة (I) الذي يحقق $y(0) = 1$ و $y'(0) = -n$ هو الدالة :

$$x \longmapsto \cos(nx) - \sin(nx) + \sin^n(x)$$