-1 a) حل المعادلة (e) :

المعادلة (e) تكتب على الشكل $y'' - 2^2y = 0$

إذن حلول المعادلة (e) هي الدوال المعرفة على IR بما يلي :

$x \longmapsto \alpha e^{2x} + b e^{-2x}$ حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

b) f حل للمعادلة (E) :

ليكن x عنصرا من IR

لدينا

$$f(x) = x(x-1)^2 e^{2x}$$
$$= (x^3 - 2x^2 + x)e^{2x}$$
$$f'(x) = (3x^2 - 4x + 1)e^{2x} + 2(x^3 - 2x^2 + x)e^{2x}$$
$$= (2x^3 - x^2 - 2x + 1)e^{2x}$$
$$f''(x) = (6x^2 - 2x - 2)e^{2x} + 2(2x^3 - x^2 - 2x + 1)e^{2x}$$
$$= (4x^3 + 4x^2 - 6x)e^{2x}$$

ومنه

$$f''(x) - 4f(x) = (4x^3 + 4x^2 - 6x)e^{2x} - 4(x^3 - 2x^2 + x)e^{2x}$$

أي $f''(x) - 4f(x) = 2x(6x-5)e^{2x}$

إذن f حل للمعادلة التفاضلية (E)

c) **اثبات التكافؤ المطلوب :**

. ليكن y حلا للمعادلة التفاضلية (E)

لدينا $y'' - 4y = 2x(6x-5)e^{2x}$

وبما أن f حل للمعادلة (E) فإن $f''(x) - 4f(x) = 2x(6x-5)e^{2x}$

ومنه $(y'' - 4y) - (f''(x) - 4f(x)) = 0$

أي $y'' - f''(x) - 4(y - f(x)) = 0$

أي $(y'' - f''(x)) - 4(y - f(x)) = 0$

إذن $y - f$ حل للمعادلة التفاضلية (e)

. ليكن $y - f$ حلا للمعادلة التفاضلية (e)

لدينا $(y'' - f''(x)) - 4(y - f(x)) = 0$

أي $y'' - f''(x) - 4y + 4f(x) = 0$

أي $y'' - 4y = f'' - 4f(x)$

وبما أن $f''(x) - 4f(x) = 2x(6x-5)e^{2x}$ فإن

$y'' - 4y = 2x(6x-5)e^{2x}$

إذن y حل للمعادلة التفاضلية (E)

d) **استنتاج حلول المعادلة (E) :**

ليكن y حلا للمعادلة (E) .

لدينا $y - f$ حل للمعادلة (e)

أي $y - f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ ، حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

ومنه $y = f(x) + \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ ، حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

أي $y = x(x-1)^2 e^{2x} + \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ ، حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على IR بما يلي :

$x \longrightarrow x(x-1)^2 e^{2x} + \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ ، حيث $\alpha \in IR$ و $\beta \in IR$

2- a) **اثبات المتساوية :**

ليكن x عنصرا من IR^{-*}

لدينا
$$x^3 e^{2x} = -e^{\ln(-x^3 e^{2x})}$$
$$= -e^{\ln(-x)^3 + 2x}$$
$$= -e^{3\ln(-x) + 2x}$$
$$= -e^{x\left[-3\frac{\ln(-x)}{-x} + 2\right]}$$

بما أن $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} x\left[-3\frac{\ln(-x)}{-x} + 2\right] = -\infty$

إن $\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{2x} = 0$

b) **حساب النهايتين المطلوبتين :**

. لدينا
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x)e^{2x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} (x^3 e^{2x} - 2x^2 e^{2x} + x e^{2x})$$
$$= 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2(xe^x)^2 = 0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\, 2x e^{2x} = 0$

. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1)^2 e^{2x}$

$$= +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1)^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

-3 a) دراسة اشارة f '(x) :

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR

ليكن x عنصرا من IR

لدينا $f'(x) = (x-1)^2 e^{2x} + 2x(x-1)e^{2x} + 2x(x-1)^2 e^{2x}$

$$= (x-1)e^{2x}\,[(x-1) + 2x + 2x(x-1)]$$

$$= 2(x-1)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{e}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{8}$ و $f(-1) = -\frac{4}{e^2}$

-4 a) الفروع اللانهائية :

. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

إذن محور الافاصيل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب .

b) دراسة تقعر المنحنى (C) :

ليكن x عنصرا من IR .

لدينا
$$f''(x) = (4x^3 + 4x^2 - 6x)e^{2x}$$
$$= 2x(2x^2 + 2x - 3)e^{2x}$$
$$= 4x\left(x + \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)e^{2x}$$

إذن (C) محدب في المجال $\left]\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right[$

و (C) غير محدب في المجال $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right[\cup \left]0, \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right[$

معادلة المماس عند النقطة O :

معادلة المماس عند النقطة O هي :
$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$
وبما أن $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ فإن معادلة المماس هي : $y = x$

c) **رسم المنحنى (C) :**