1- حلول المعادلة $y''-4y=0$

المعادلة $y''-4y=0$ تكتب على الشكل $y''-2^2y=0$

إذن حلول هذه المعادلة هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$x \longmapsto \alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

2- اثبات النتيجة المطلوبة :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا $f(x)=x\,e^{2x}$

ومنه $f'(x)=e^{2x}+2x\,e^{2x}$

ومنه $f''(x)=2e^{2x}+2e^{2x}+4x\,e^{2x}$

أي $f''(x)=4e^{2x}+4x\,e^{2x}$

إذن $f''(x)=4e^{2x}+4f(x)$

أي $f''(x)-4f(x)=4e^{2x}$

وهذا يعني أن f حل للمعادلة (E)

3- الاستنتاج

. ليكن y حلا للمعادلة (E)

لدينـــا $y''-4y=4e^{2x}$ ولدينا من جـــهة أخـــرى

$f''(x)-4f(x)=4e^{2x}$ (f حل للمعادلة (E))

ومنه $(y''-4y)-(f''(x)-4f(x))=0$

أي $(y''-f''(x))-4(y-f(x))=0$

إذن $y-f$ حل للمعادلة التفاضلية $y''-4y=0$

. ليكن $y-f$ حلا للمعادلة التفاضلية $y''-4y=0$.

لدينا $y''-f''(x)-4(y-f(x))=0$

أي $y''-4y=f''(x)-4f(x)$

أي $y''-4y=4e^{2x}$

وبالتالي فإنه يكون y حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $y-f$ حلا للمعادلة التفاضلية $y''-4y=0$.

أي $y-f(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

وهذا يعني أن : $y=f(x)+\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

أي أن جميع حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة علـى $\mathbb{R}$ بما يلي :

$x \longmapsto x\,e^{2x}+\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$