I -1- * حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x^2 + 1 = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} (-\ln x) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

* لنبين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

لدينا لكل x من IR^{+*} : $g(x) = x\left(2x - \frac{\ln x}{x}\right) + 1$

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

-2 أ– حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*} :

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{2x+1}{x} \cdot (2x - 1)$$

ب– جدول تغيرات الدالة g :

إشارة $g'(x)$ هي اشارة $2x - 1$

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2} + \ln 2$	↗	$+\infty$

ج- استنتاج أن $g(x) > 0$ لكل x من IR^{+*}

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن : $g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln 2$

لكل x من IR^{+*}

وبما أن $\frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ فإن $g(x) > 0$ لكل x من IR^{+*}

II- 1- * حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x - 2) = -2$

و $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

* حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2- تحديد مقاربي $(\mathscr{C})$

المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 0$ (أي محور الأراتيب)

لأن : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

ويقبل مقاربا مائلا معادلته $y = 2x - 2$ لأن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

3- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*}:

$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$$

$$= 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot g(x)$$

4- جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x)$

وبما أن $g(x) > 0$ لكل x من IR^{+*} (حسب نتيجة السؤال I - 2 - ج)

فإن $f'(x) > 0$ لكل x من IR^{+*}

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		+∞
f ' (x)	‖	+	
f(x)	‖ −∞	↗	+∞

5- أ- حساب f " (x)

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*} :

$$f''(x)=\left[\frac{g(x)}{x^2}\right]'$$

$$=\frac{g'(x).\ x^2-2x\ \ g(x)}{x^4}=\frac{\left(4x-\frac{1}{x}\right).\ x^2-2x\ (2x^2+1-\ln x)}{x^4}$$

$$=\frac{4x^3-x-4x^3-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{2x\ln x-3x}{x^4}$$

$$=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

ب- تحديد نقطة الانعطاف

اشارة f " (x) هي اشارة $2\ln x-3$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي اشارة f "(x) وتقعر المنحنى (C) :

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		+∞
f " (x)	‖	−	0	+	
(C)		∩		∪	

الدالة f " تنعدم مع تغيير الاشارة في $e^{\frac{3}{2}}$

إذن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها $e^{\frac{3}{2}}$ وأرتوبها $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$

6- إنشاء (C)