

I-1- * حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 + 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

* لنبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

لدينا لكل x من \mathbb{R}^{++} : $g(x) = x \left(2x - \frac{\ln x}{x} \right) + 1$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2- أ- حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{++} ولدينا لكل x من \mathbb{R}^{++} :

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{2x + 1}{x} \cdot (2x - 1)$$

ب- جدول تغيرات الدالة g :

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2x - 1$

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2} + \ln 2$	$+\infty$

ج- استنتاج أن $g(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}^{+*}
 من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن : $g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln 2$
 لكل x من \mathbb{R}^{+*}

وبما أن $\frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ فإن $g(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}^{+*}

II-1- * حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 2) = -2$

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

* حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- تحديد مقاربي (ج)

المنحنى (ج) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 0$ (أي محور الأرتيب)

لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

ويقبل مقاربا مائلا معادلته $y = 2x - 2$ لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

3- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{+*} ولدينا لكل x من \mathbb{R}^{+*} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \\ &= 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot g(x) \end{aligned}$$

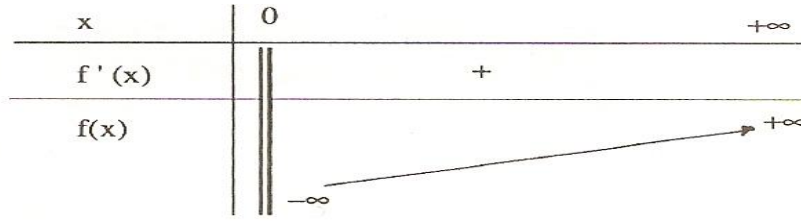
4- جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

وبما أن $g(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}^{+*} (حسب نتيجة السؤال I - 2 - ج)

فإن $f'(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}^{+*}

ومنه جدول تغيرات الدالة f :



5- أ - حساب $f''(x)$

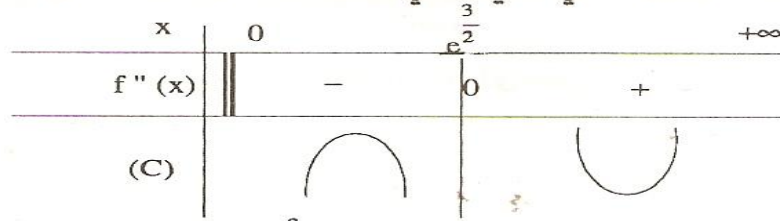
الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R}^{+*} ولدينا لكل x من \mathbb{R}^{+*} :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{g(x)}{x^2} \right]' \\ &= \frac{g'(x) \cdot x^2 - 2x \cdot g(x)}{x^4} = \frac{\left(4x - \frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - 2x(2x^2 + 1 - \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{4x^3 - x - 4x^3 - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} \\ &= \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \end{aligned}$$

ب- تحديد نقطة الانعطاف

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $2 \ln x - 3$

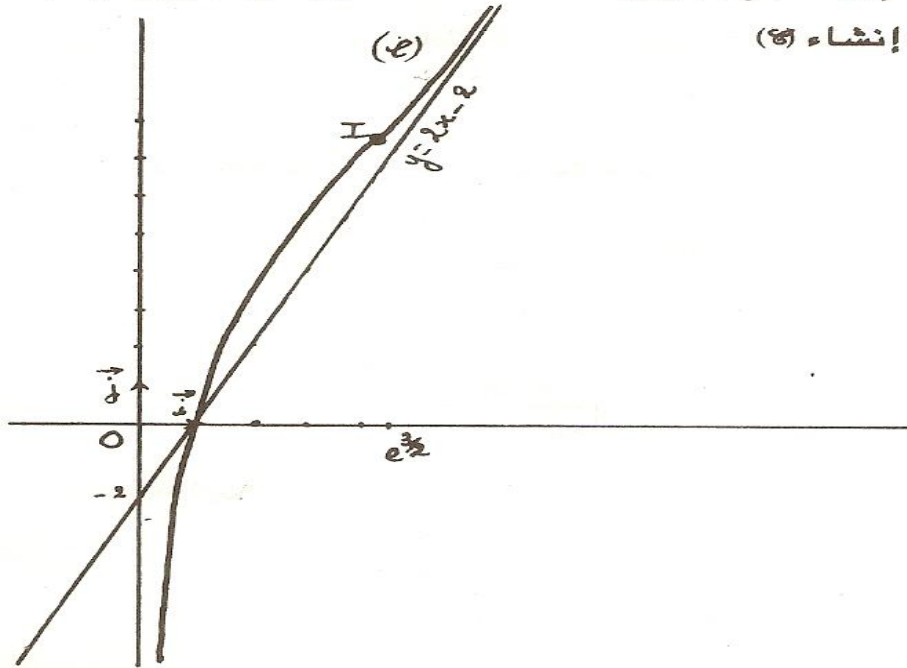
ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقع المنحنى (C):



الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في $e^{\frac{3}{2}}$

إذن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها $e^{\frac{3}{2}}$ وأرتوبها $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$

6- إنشاء (C)



www.Achamel.net
www.Achamel.info
www.Achamel.org
www.Achamel.ma

Achamel