

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{* حساب}$$

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة (شكل غير محدد):

$$(0 \times (+\infty))$$

لدينا لكل x من \mathbb{R}^* :

$$\begin{aligned} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) &= x \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) = x [\ln(x^2 + 1) - \ln x^2] \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln |x| \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + 1) = 0 \cdot \ln 1 = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln |x| &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -(-x) \ln(-x) \quad \text{و} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} -u \ln u = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln |x| = 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0 \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln (x^2 + 1) - 2x \ln |x|) = 0 - 2 \times 0 = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \text{أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \ln (x^2 - 1)] \quad \text{* حساب}$$

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة (شكل غير محدد $-\infty + \infty$)
لدينا لكل x من $]-\infty, -1[$:

$$\begin{aligned} x + \ln (x^2 - 1) &= x + \ln \left[x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= x + \ln x^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = x + 2 \ln |x| + \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x + 2 \ln (-x) + \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= -x \left[-1 + \frac{2 \ln (-x)}{-x} \right] + \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln (-x)}{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \ln (x^2 - 1)] = -\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x-1}{x+1} \quad \text{* حساب}$$

لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة (شكل غير محدد $+\infty \times 0$)

$$tx + t = x - 1 \quad \text{نضع} \quad t = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{إذن}$$

$$x = \frac{1+t}{1-t} \quad \text{أي} \quad x(t-1) = -t-1 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \frac{1+t}{1-t} \ln t \quad \text{إذن}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} -(1+t) \cdot \frac{\ln t}{t-1}$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \frac{\ln t}{t-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} -(1+t) = -2 \quad \text{وبما أن}$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} -(1+t) \frac{\ln t}{t-1} = -2 \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x-1}{x+1} = -2 \quad \text{وبالتالي :}$$

Achamel