1-أ- نبين بالترجع أن : $0 \prec U_n \prec 3$

*بما أن : $U_0 = 2$

فإن $0 \prec U_0 \prec 3$

إذن الخاصية صحيحة من أجل n=0

- ليكن n عنصرا من IN

نفترض أن $0 \prec U_n \prec 3$ ونبين أن: $0 \prec U_{n+1} \prec 3$

بما أن: $U_n \succ 0$ فإن $7U_n \succ 0$ و $1+2U_n \succ 0$

إذن $\frac{7U_n}{1+2U_n} \succ 0$

وبالتالي فإن $U_{n+1} \succ 0$ (1)

لنبين أن: $U_{n+1} \prec 3$

لدينا : $U_{n+1} - 3 = \frac{7U_n}{1+2U_n} - 3$

$= \frac{7U_n - 3 - 6U_n}{1+2U_n} = \frac{U_n - 3}{1+2U_n}$

وبما أن : $U_n - 3 \prec 0$ (لأن $U_n \prec 3$)

و $1+2U_n \succ 0$

فإن $\frac{U_n - 3}{1+2U_n} \prec 0$ أي : $U_{n+1} - 3 \prec 0$

أي : $U_{n+1} \prec 3$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن : $0 \prec U_{n+1} \prec 3$

خلاصة: $0 \prec U_n \prec 3$ $(\forall n \in IN)$

ب- نبين أن (U_n) تزايدية قطعا

ليكن n عنصرا من IN

لدينا: $U_{n+1} - U_n = \frac{7U_n}{1+2U_n} - U_n$

$= \frac{7U_n - U_n - 2U_n^2}{1+2U_n} = \frac{6U_n - 2U_n^2}{1+2U_n}$

$= \frac{2U_n(3-U_n)}{1+2U_n}$

وبما أن $2U_n \succ 0$ و $1+2U_n \succ 0$ (لأن $U_n \succ 0$)

و $3-U_n \succ 0$ (لأن $U_n \prec 3$)

فإن $\frac{2U_n(3-U_n)}{1+2U_n} \succ 0$

أي $U_{n+1} - U_n \succ 0$

إذن المتتالية (U_n) هي بالفعل تزايدية قطعا

2-أ* نبين أن (V_n) هندسية

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}}{3-U_{n+1}}$

$$= \dfrac{\dfrac{7U_n}{1+2U_n}}{3-\dfrac{7U_n}{1+2U_n}} = \dfrac{\dfrac{7U_n}{1+2U_n}}{\dfrac{3+6U_n-7U_n}{1+2U_n}} = \dfrac{7U_n}{3-U_n} = 7V_n$$

إذن المتتالية (V_n) هي بالفعل هندسية أساسها q=7

وحدها الأول : $V_0 = \dfrac{U_0}{3-U_0} = \dfrac{2}{3-2} = 2$

- **كتابة V_n بدلالة n**

ليكن n عنصرا من IN

بما أن (V_n) متتالية هندسية

فإن $V_n = V_0 q^n$

وبالتالي فإن : $V_n = 2.7^n$ لكل n من IN

ب- استنتاج U_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من IN

لدينا: $V_n = \dfrac{U_n}{3-U_n}$ إذن $3V_n - U_nV_n = U_n$

أي : $U_n + U_nV_n = 3V_n$ أي : $(1+V_n)U_n = 3V_n$

ومنه : $U_n = \dfrac{3V_n}{1+V_n}$

$$= \dfrac{6.7^n}{1+2.7^n}$$

* **حساب نهاية** (U_n)

لكل n من IN، لدينا : $U_n = \dfrac{6.7^n}{1+2.7^n}$

$$= \dfrac{6.7^n}{7^n\left(\dfrac{1}{7^n}+2\right)} = \dfrac{6}{\left(\dfrac{1}{7}\right)^n + 2}$$

ونعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$ (لأن $-1 \prec \dfrac{1}{7} \prec 1$)

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{6}{0+2} = 3$

Achamel.net