حساب النهايات

- لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^3-2x^2+1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

لدينا : $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^3+1}{x^3}=-\infty$

لأن : $\lim_{x\to0^-}\left(x^3+1\right)=1$ و $\lim_{x\to0^-} x=0^-$

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^4+x^3-2x^2+1}{x^3}=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to0^+} x^4+x^3-2x^2+1$ و $\lim_{x\to0^+} x^3=0^+$

2 أ لنبين أن (Δ) مقارب للمنحنى بجوار $+\infty$

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)-(x+1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (ζ) بجوار $+\infty$

ب – دراسة وضع (ζ) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $]1,+\infty[$ لكل x من $]1,+\infty[$ لدينا :

$$f(x)-(x+1)=\frac{-2}{x}+\frac{1}{x^3}$$

$$=\frac{1-2x^2}{x^3}$$

وبما أن $1-2x^2\prec0$ و $x^3\succ0$ لكل x من $]1,+\infty[$ فإن $f(x)-(x+1)\prec0$ $\left(\forall x\in\,]1,+\infty[\right)$

وبالتالي فإنه في المجال $]1,+\infty[$ يكون المنحنى (ζ) تحت مقاربه المائل (Δ)

ج - باقي الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

و $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

إذن المنحنى (ζ) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا إتجاهه محور الأراتيب .

لدينا

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty=$$

إذن المستقيم ذو المعادلة x = 0 هو مقارب رأسي للمنحنى (ζ)

3 تحديد f'

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ ولدينا :

لكل x من $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=\left(x+1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$=1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}$$

$$=\frac{x^4+2x^2-3}{x^4}$$

$$=\frac{x^4+2x^2+1-4}{x^4}=\frac{(x^2+1)^2-4}{x^4}$$

$$=\frac{(x^2+1-2)(x^2+1+2)}{x^4}=\frac{(x^2-1)(x^2+3)}{x^4}$$

لكل x من $]-\infty,0[$:

$$f'(x)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$$

$$=2x-\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3-1}{x^2}$$

4 – جدول تغيرات f

* على المجال $]0,+\infty[$ إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2-1

* على المجال $]-\infty,0[$ إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x^3-1$

وبما أن $x\prec0$ فإن $2x^3\prec0$ ومنه $2x^3-1\prec0$ لكل x من $]-\infty,0[$

إذن جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5 – أ نقطتا انعطاف المنحنى (ζ)

* لدينا $$(\forall x \in]-\infty,0[)\, f''(x)=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$$
$$=\frac{-x-1}{-x}\cdot\frac{2(x^2-x+1)}{x^2}$$

وبما أن $x^2-x+1 \succ 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ $(\Delta \prec 0)$

فإن إشارة $f'(x)$ في المجال $]-\infty,0[$ هي إشارة $(-x-1)$

لدينا : $$(\forall x \in]0,+\infty[)\, f'(x)=\frac{-4(x^2-3)}{x^5}$$
$$=\frac{4(\sqrt{3}-x)(x+\sqrt{3})}{x^5}$$

إذن إشارة $f'(x)$ في $]0,+\infty[$ هي إشارة $(\sqrt{3}-x)$

* الجدول التالي يعطي إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	‖	+	0	-	

الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في كل من (-1) و $\sqrt{3}$

إذن للمنحنى (ζ) نقطتا انعطاف هما $A(-1,0)$ هو

$$B\left(\sqrt{3},\frac{4+3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)$$

ب * معادلة لمماس (ζ) في $A(-1,0)$

y = -3x – 3

معادلة لمماس (ζ) في $B\left(\sqrt{3},\frac{4+3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{3\sqrt{3} - 8}{3\sqrt{3}}$$

6 – رسم المنحنى (ζ)