$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{6 + 4\,u_n}{3 + u_n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$I = \,]-1, +\infty[\qquad ; \quad f(x) = \frac{6 + 4x}{3 + x} \quad ; \quad x \in \,]-1, +\infty[$$

1) $$\forall x \in I \quad ; \quad f'(x) = \frac{6}{(3 + x)^2} > 0$$

x	-1		+∞
f'(x)		+	
f(x)	1	↗	4

إذن $f(I) = \,]1, 4[$

ومنه فإن $\boxed{f(I) \subset I}$

2) • لدينا $u_0 = 1$ إذن $1 \le u_0 < 3$

• نفترض أن $1 \le u_p < 3$ $(p \in \mathbb{N})$

• لنبين أن $1 \le u_{p+1} < 3$

$$\left.\begin{array}{r} 1 \le u_p < 3 \\ f \text{ تزايدية قطعا على } I \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) \le f(u_n) < f(3)$$

$$\Rightarrow \frac{10}{4} \le u_{n+1} < \frac{18}{6}$$

$$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} < 3 \qquad \left(1 \le \frac{10}{4} \quad \text{لأن}\right)$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \; 1 \le u_n < 3}$

3) أ - * لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = \dfrac{5}{2}$

إذن $u_1 \ge u_0$

• نفترض أن $u_{p-1} \le u_p$ من أجل p من $\mathbb{N}^*$.

• لنبين أن $u_p \le u_{p+1}$

$$\left.\begin{array}{r} u_{p-1} \le u_p \\ f \text{ تزايدية على } I \end{array}\right\} \Rightarrow f(u_{p-1}) \le f(u_p)$$

$$\Rightarrow u_p \le u_{p+1}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \leq u_{n+1}}$

ومنه فإن المتتالية (u_n) تزايدية.

* بما أن (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 3 فإنها متقاربة.

ب- بما أن f دالة متصلة على I و $f(I) \subset I$ و $u_n \in I$ لكل n من $\mathbb{N}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ و (u_n) متقاربة فإن ℓ نهاية (u_n) تحقق : $f(\ell) = \ell$ و $\ell \in I$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow \frac{6+4\ell}{3+\ell} = \ell \\ &\Leftrightarrow 6 + 4\ell = 3\ell + \ell^2 \\ &\Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 3 \quad \text{أو} \quad \ell = -2 \end{aligned}$$

إذن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 3}$

4) $$v_n = \frac{-3 + u_n}{2 + u_n}$$

أ- $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{-3 + u_{n+1}}{2 + u_{n+1}} \\ &= \frac{-3 + \dfrac{6+4u_n}{3+u_n}}{2 + \dfrac{6+4u_n}{3+u_n}} \\ &= \frac{-9 - 3u_n + 6 + 4u_n}{6 + 2u_n + 6 + 4u_n} \\ &= \frac{-3 + u_n}{12 + 6u_n} \\ &= \frac{1}{6} v_n \end{aligned}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n}$

ومنه فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

ب ـ * لدينا : $v_0 = \frac{-3 + u_0}{2 + u_0} = -\frac{2}{3}$.

إذن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad v_n = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

*
$$v_n = \frac{-3 + u_n}{2 + u_n} \Leftrightarrow 2 v_n + v_n u_n = -3 + u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n (1 - v_n) = 3 + 2 v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3 + 2 v_n}{1 - v_n}$$

إذن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_n = \frac{3 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}}$$