(I

(1 * نعلم أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = 0$ وبالتالي :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x^2 - x^2 \ln x) = 1 .$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ إذن :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - x^2 - x^2 \ln x) = -\infty$$

* لكل x من $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = -2x - 2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= -x(3 + 2\ln x)$$

من خلال جدول إشارة $-x(3 + 2\ln x)$:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
$3 + 2\ln x$		$-$	0	$+$	
$-x(3 + 2\ln x)$		$+$	0	$-$	

نستنتج جدول تغيرات g :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	$\nearrow$	$1+\frac{e^{-3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1 - 1^2 - 1^2 \ln 1 = 0$ (2

ليكن g_1 قصور الدالة g على المجال $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right[$.

من خلال جدول تغيرات g نلاحظ أن g_1 تقابل من $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right[$

نحو $\left]-\infty, 1+\frac{e^{-3}}{2}\right]$ ، لأن g_1 دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right[$.

بما أن $0 \in \left]-\infty, 1+\frac{e^{-3}}{2}\right]$ فإن المعادلة $g_1(x) = 0$; $x \in \left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right[$

تقبل حلا وحيدا هو: $x = 1$.

لكن 0 ينتمي فقط الى المجال $\left]-\infty, 1+\frac{e^{-3}}{2}\right]$. إذن المعادلتان :

$g(x) = 0$; $x \in \mathbb{R}$ ، و $g_1(x) = 0$; $x \in \left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right[$

متكافئتان، وبالتالي لهما نفس الحلول :

وهكذا : $S = \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} = \{1\}$

3) من خلال ما سبق نستنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, 1[$:

II) 1) أ- $x \in D_f$ يعني أن $1 - x^2 \geq 0$ و $x > 0$

من خلال الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نستنتج أن الأعداد الحقيقية الموجبة قطعا والتي تحقق $1 - x^2 \geq 0$ هي المجال $]0, 1]$.

وبالتالي : $D_f =]0, 1]$

ب- نعلم أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ ، كما أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{1 - x^2} = 1$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{1 - x^2} . \ln x = -\infty$

النتيجة : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$. تعني هندسيا أن المستقيم ذي المعادلة

$x = 0$ مقارب للمنحنى C_f.

2) أ- $f(1) = 0$

ليكن $x \in]0, 1[$ لدينا :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{1 - x^2} \ln x}{x - 1}$$

$$= \sqrt{1 - x^2} \left(\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \right)$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = 1$. كما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{1 - x^2} = 0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$

وهذا يعني أن f قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة $x_0 = 1$.

ب- لكل x من $]0, 1[$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \ln x + \sqrt{1 - x^2} . \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{x \ln x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$= \frac{1 - x^2 - x^2 \ln x}{x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{g(x)}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

رأينا أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, 1[$.

كما أن $x\sqrt{1 - x^2} > 0$ لكل x من $]0, 1[$ إذن :

$$(\forall x \in]0, 1[) \quad : \quad f'(x) > 0$$

جدول تغيرات f :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0

www.Achamel.net cours pratiques en ligne